ÜBER DIE ASYMPTOTISCHE DARSTELLUNG DER INTEGRALE LINEARER DIFFERENZEN-GLEICHUNGEN DURCH POTENZREIHEN

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT (II. SEKTION)

DER

K. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT

ZU MÜNCHEN

AM 10. APRIL 1913

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

THEODOR ERB

AUS PIRMASENS

PIRMASENS

DRUCK VON W. NEUMANN

1913

ÜBER DIE ASYMPTOTISCHE DARSTELLUNG DER INTEGRALE LINEARER DIFFERENZEN-GLEICHUNGEN DURCH POTENZREIHEN

INAUGURAL-DISSERTATION

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT (II. SEKTION)

DER

K. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT

ZU MÜNCHEN

AM 10. APRIL 1913

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

THEODOR ERB

AUS PIRMASENS

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

PIRMASENS

DRUCK VON W. NEUMANN

1913

INHALTS-ÜBERSICHT.

Seite

Einleitung . . . . . 5— 9

§ 1. Die zu untersuchende lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung $D(y)=0$. Ihr Newton-Puiseux'sches Polygon. Formulierung der Potenzreihen S_i . . . . . 10—13

§ 2 und 3. Formale Erfüllung der Differenzengleichung durch m Potenzreihen S_{ij}. Charakteristische Gleichungen. Bestimmung der in S_{ij} enthaltenen Konstanten . . . . . 13—26

§ 4. Darstellung des Verfahrens der sukzessiven Approximation. Die inhomogene lineare Differenzengleichung $D_1(u_{v+1})=D_2(u_v)$ 26—32

§ 5. Integration der Gleichung $D_1(u_{v+1})=D_2(u_v)$. Rekursionsformeln für die Funktion u_v und die in u_v enthaltene Funktion F_v . 32—36

§ 6. Abschätzungsformeln für u_v und F_v. Das Verhalten des ersten Faktors der S_{ij} für wachsende x . . . . . 37—39

§ 7. Vereinfachung der in § 6 für F_v gefundenen Resultate: Einfache Abschätzungsformel für F_v bei wachsenden v und x . . . . 39—46

§ 8. Vereinfachung der in § 6 für u_v gefundenen Resultate: Einfache Abschätzungsformel für u_v bei wachsenden v und x . . . . 46—49

§ 9. Ein Integral von $D(y)=0$. Darstellung seiner Werte für große x 49—51

§ 10. Ein Fundamentalsystem von Integralen. Ihre asymptotische Darstellung durch die Reihen S_{ij} . . . . . 51—56

Schluß: Die Bedingungen, unter denen $D(y)=0$ durch Potenzreihen mit ganzen Potenzen von x^{-1} befriedigt wird. Ein Zusatz zu den Definitionen des § 1 . . . . . 56—58

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548309_0107

EINLEITUNG.

Die vorliegende Abhandlung bildet eine Fortsetzung zu einer Reihe von Arbeiten, denen der von H. Poincaré [1]) über Differenzengleichungen veröffentlichte Satz als Ausgangspunkt gedient hat, und knüpft an Untersuchungen von Herrn O. Perron [2]) an, deren Ergebnisse, so weit sie für uns in Frage kommen, folgende sind: „Ist

$$\text{(I)} \qquad D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + a_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \ldots + a_r^{(\nu)} D_\nu = 0$$

eine lineare Differenzengleichung r^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten sich in der Form

$$\text{(II)} \qquad a_i^{(\nu)} = a_i \left\{ \nu^{k_i} \right\} \qquad (i=1, 2, \ldots r)$$

schreiben lassen, wobei das Symbol $\left\{ \nu^{k_i} \right\}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ definierte Funktionen bedeutet, für welche

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\left| \left\{ \nu^{k_i} \right\} \right|}{\nu^{k_i}} = 1 \qquad (i=1, 2, \ldots r)$$

ist, so konstruiert man in einer Ebene unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems die $r+1$ Punkte

$$Q_0, \; Q_1, \; \ldots \; Q_r$$

mit den bez. Koordinaten

$$x = i, \; y = k_i \qquad (i=0, 1, \ldots r),$$

wobei k_0 gleich Null genommen wird, und umspannt diese Punkte mit einem nach der Seite der positiven y konvexen Newton-Puiseux'schen Polygon. Bezeichnet σ die Seitenzahl des Polygons und

$$x = e_i, \; y = k_{e_i} \qquad (i=0, 1, \ldots \sigma)$$

---

[1]) *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies.* American Journ. of Math. **7,** 213 ff. (1885).

[2]) *Über lineare Differenzengleichungen.* Acta Math. **34,** 109—137 (1911).

die Koordinaten der Eckpunkte ($e_0 = 0$, $e_\sigma = r$), so sind die Richtungskoeffizienten der Polygonseiten der Reihe nach

$$\text{(III)} \qquad q_i = \frac{k_{e_i} - k_{e_{i-1}}}{e_i - e_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma).$$

Schicken wir dann noch die Definition voraus: Eine Funktion D_ν heißt von der Ordnung q, wenn sie den Ungleichungen

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} |D_\nu| &< M^\nu \left(\Gamma(\nu+1)\right)^q && \text{für } \nu > \nu_1, \\ |D_\nu| &> m^\nu \left(\Gamma(\nu+1)\right)^q && \text{für unbegrenzt viele } \nu \end{aligned}$$

genügt, so gilt der Satz:

Die Differenzengleichung (I) hat ein Fundamentalsystem von r Integralen, die derart in σ Klassen zerfallen, daß die Integrale einer Klasse und deren lineare Kombinationen von ein und derselben Ordnung sind. Dabei gehören der 1ten, 2ten, . . . σ^{ten} Klasse bez.

$$e_1 - e_0,\ e_2 - e_1,\ \ldots\ e_\sigma - e_{\sigma-1}$$

Integrale des Fundamentalsystems an und die zugehörigen Ordnungen sind respektive

$$\text{(V)} \qquad q_1 = \frac{k_{e_1} - k_{e_0}}{e_1 - e_0},\ q_2 = \frac{k_{e_2} - k_{e_1}}{e_2 - e_1},\ \ldots\ q_\sigma = \frac{k_{e_\sigma} - k_{e_{\sigma-1}}}{e_\sigma - e_{\sigma-1}}.\text{“}$$

Mit diesem sehr allgemeinen Satze vergleichen wir nun ein spezielleres von Herrn J. Horn [3]) aufgestelltes Theorem, das folgendermaßen lautet: „Ist eine Differenzengleichung von der Form

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} y(x+m) + x^k P_1\, y(x+m-1) + x^{2k} P_2\, y(x+m-2) + \ldots \\ + x^{mk} P_m\, y(x) = 0 \end{aligned}$$

vorgelegt, worin k eine beliebige reelle Zahl bedeutet und die Koeffizienten

$$\text{(VIa)} \qquad P_i = a_i + \frac{a_i'}{x} + \frac{a_i''}{x^2} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ oder Funktionen von x sind, die sich durch

[3]) *Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzen- und Differentialgleichungen für große Werte der Veränderlichen.* Journ. f. Math. **138**, 159—191 (1910).

Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ asymptotisch darstellen lassen, und sind ferner die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ der charakteristischen Gleichung

(VIb) $$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \ldots + a_{m-1} \alpha + a_m = 0$$

von einander und von Null verschieden, so wird Gleichung (VI) durch die Reihen

(VII) $$S_i \equiv \left(\Gamma(x+1)\right)^k \alpha_i^x x^{\varrho_i} \left(1 + \frac{A_{i1}}{x} + \frac{A_{i2}}{x^2} + \ldots\right) \quad (i=1, 2, \ldots m)$$

formal erfüllt und besitzt m linear unabhängige Integrale $y_1, \ldots y_m$, die für große reelle positive Werte von x die asymptotischen Gleichungen

$$y_i \sim S_i \quad (i=1, 2, \ldots m)$$

befriedigen."

Bei einem Vergleich der Gleichungsformen (I) und (VI) fällt zunächst die viel umfassender gehaltene Definition (II) der zur Gleichung (I) gehörenden Koeffizienten ins Auge. Während aber dann die Grade des Unendlichwerdens der einzelnen Koeffizienten in (I) willkürlich bleiben, sind sie in (VI) dadurch einer gewissen Regelmäßigkeit unterworfen, daß jeder spätere aus dem vorhergehenden durch Addition von k entsteht. Wir haben es also in Gleichung (VI) mit einem extremen Falle der Gleichung (I) zu tun, den Herr Perron in seiner vorhin erwähnten Arbeit S. 136 hervorhebt. In diesem Falle hat nämlich das zur Differenzengleichung gehörende Polygon nur eine Seite, die Verbindungsstrecke des Koordinatenanfangspunktes mit dem Punkte $X = m$, $Y = mk$.

Demgemäß gehört zu Gleichung (VI) nur eine Klasse von Integralen und alle Integrale sind wegen (V) von der Ordnung $q_1 = \frac{mk}{m} = k$, was uns ein Blick auf Gleichung (VII) bestätigt.

Durch diese Betrachtungen gelangen wir dazu als Problem unserer Arbeit die Untersuchung zu wählen, ob das von Herrn Horn aufgestellte Theorem auch Geltung behalten wird, wenn wir in der Gleichung (VI) die Beziehung zwischen den Graden des Unendlichwerdens der Koeffizienten aufheben, d. h. die eine arithmetische Progression bildenden Zahlen $k, 2k, \ldots mk$ durch beliebige Zahlen ersetzen. Dabei zeigt uns der Satz des Herrn Perron durch das Gleichungssystem (V), in welcher Weise wir den Exponenten k der Gammafunktion, der in der Definitionsgleichung (VII) enthalten ist, abzuändern haben werden.

Wir werden sehen, daß diese Verallgemeinerung noch wesentliche Änderungen im Typus der Gleichung (VI) und der Reihen (VII) notwendig macht. Der erste Teil unserer Arbeit, §§ 1—3, hat also die Aufgabe die neuen Formen von (VI) und (VII) aufzustellen und nachzuweisen, daß unsere Differenzengleichung m^{ter} Ordnung durch die gefundenen Reihen formal erfüllt wird. Im zweiten Teil, §§ 4—10, werden wir dann beweisen, daß die Differenzengleichung ein Fundamentalsystem von m Integralen hat, die sich durch unsere Reihen asymptotisch darstellen lassen.

Doch sei es uns zuvor erlaubt noch einen Blick auf einige Arbeiten des Herrn N. E. Nörlund[4]) zu werfen, die zwar andere Ziele als das unsrige verfolgen, aber doch Berührungspunkte mit unserem Problem aufweisen. In der ersten der soeben erwähnten Arbeiten wird Seite 38 eine Differenzengleichung der Form

$$\text{(VIII)} \quad p_k(x)\,u(x+k) + p_{k-1}(x)\,u(x+k-1) + \ldots + p_0(x)\,u(x) = 0$$

zum Gegenstand der Untersuchung gemacht, wobei aber nicht nur die Koeffizienten als rationale Funktionen vorausgesetzt werden, sondern auch gefordert wird, daß die beiden Anfang und Schluß bildenden Koeffizienten $p_k(x)$ und $p_0(x)$ Polynome gleichen Grades in x seien, deren Grad von dem der übrigen Koeffizienten höchstens erreicht, keinesfalls aber übertroffen werde. Es ist klar, daß diese Forderung identisch ist mit der, daß das zur Gleichung (VIII) gehörende Polygon nur eine Seite habe. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß in der zweiten von uns angezogenen Arbeit Herr Nörlund S. 16 und 17 eine Reihe Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\lambda$ definiert, die mit den Größen $q_1, q_2, \ldots q_o$, welche wir im Satze des Herrn Perron in Gleichung (V) kennen gelernt haben, zwar identisch sind, aber im Gegensatz zu den willkürlich gelassenen q_i der Formel (V) auf ganzzahlige Werte beschränkt werden. Die Koeffizienten der hier behandelten Differenzengleichung sind Poly-

---

[4]) a) *Bidrag til de lineære Differensligningers Theori.* Diss. Kopenhagen 1910.

b) *Fractions continues et différences réciproques.* Acta Math. **34,** 1—108 (1911).

c) *Über lineare Differenzengleichungen.* Bulletin Acad. R. des Sciences et des Lettres, Kopenhagen (Bd. 1911).

Diese letztere Schrift ist eine Übersicht über die Resultate der unter a) genannten Arbeit.

nome beliebigen Grades, aber die Richtungskoeffizienten der Seiten des zur Gleichung gehörenden Polygones, eben die Größen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\lambda$, müssen ganze Zahlen sein. Wenn wir also in den folgenden Untersuchungen die Koeffizienten der Differenzengleichung nicht mehr als rationale Funktionen voraussetzen und als Richtungskoeffizienten der Polygonseiten auch gebrochene Zahlen zulassen, so zeigt unser Problem größere Allgemeinheit als die soeben besprochenen Fälle.

§ 1.

Bei dem Versuch die Differenzengleichung (VI) in der von uns gewünschten Weise zu verallgemeinern zeigt es sich, daß die Gleichung allgemeinerer Art nicht mehr durch Potenzreihen, die nach ganzen Potenzen der Veränderlichen fortschreiten, formal befriedigt werden kann, sondern daß wir Potenzreihen mit gebrochenen Exponenten zu Hilfe nehmen müssen. Wir werden auf diese Tatsache später zurückkommen, für jetzt aber hat sie die Folge, daß wir die Koeffizienten unserer Differenzengleichung von vornherein ebenfalls als nach gebrochenen Potenzen von x fallende Reihen annehmen wollen um so einen möglichst allgemeinen Gleichungstypus herzustellen. Bezeichnen wir also die linke Seite mit dem Operationssymbol D, so sei

$$(1)\quad D(y) \equiv y(x+m) + x^{k_1} P_1\, y(x+m-1) + x^{k_2} P_2\, y(x+m-2) + \ldots + x^{k_m} P_m\, y(x) = 0$$

die vorgelegte lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung. Darin seien $k_1, k_2, \ldots k_m$ irgend welche rationale*) Zahlen.

Die $P_1, P_2, \ldots P_m$ seien Potenzreihen der Form

$$(2)\qquad P_i \equiv a_i + \frac{a_i'}{x^{\varepsilon}} + \frac{a_i''}{x^{2\varepsilon}} + \frac{a_i'''}{x^{3\varepsilon}} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

wobei

$$(3)\qquad \varepsilon \equiv \frac{1}{a}$$

und a eine ganze positive Zahl ist, oder sie seien Funktionen P_i von x, welche für große positive Werte von x durch divergente Potenzreihen asymptotisch dargestellt werden, so daß also für jede ganze positive Zahl n die Gleichungen

$$P_i = a_i + \frac{a_i'}{x^{\varepsilon}} + \frac{a_i''}{x^{2\varepsilon}} + \ldots + \frac{a_i^{(n)}}{x^{n\varepsilon}} + \frac{\alpha_{in}}{x^{n\varepsilon}} \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

*) Die Zahl k in Gleichung (VI) des Horn'schen Theorems ist als beliebige reelle Zahl angenommen. Daß diese Annahme nur scheinbar allgemeiner ist als die unsrige, werden wir am Schlusse zeigen.

und $$\lim_{r=\infty} \pi_{in} = 0$$

gelten.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir alle a_i als von Null verschieden annehmen. Denn sollten für einen bestimmten Wert $i = \lambda$ etwa die r ersten $a_\lambda^{(j)}$, also a_λ, a_λ', a_λ'', . . . $a_\lambda^{(r-1)}$ gleich Null sein, so wählen wir k_λ um die Zahl $r\varepsilon$ niedriger; und wären für ein $i = \lambda$ sämtliche a_λ, a_λ', a_λ'', . . . gleich Null, so können wir diesem Umstand durch die Wahl $k_\lambda = -\infty$ Rechnung tragen, wenn wir definieren, daß unter $x^{-\infty}$ eine Funktion verstanden werden soll, die für alle Werte $x = 0, 1, 2, \ldots$ dauernd Null bleibt. Dabei setzen wir aber von vornherein fest, daß das letzte der k_i, also k_m, größer als $-\infty$ sein soll.

Was den Koeffizienten von $y(x+m)$ anlangt, den wir in Gleichung (1) gleich 1 genommen haben, so möge es uns der Gleichförmigkeit halber erlaubt sein dafür gelegentlich $x^{k_0} P_0$ zu schreiben und es ist in diesem Falle

$$P_0 = a_0 = 1 \text{ und } k_0 = 0.$$

Nun konstruieren wir in einer Ebene unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen $(X\text{-}Y)$-Koordinatensystems die $m+1$ Punkte

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots Q_m,$$

deren Koordinaten der Reihe nach

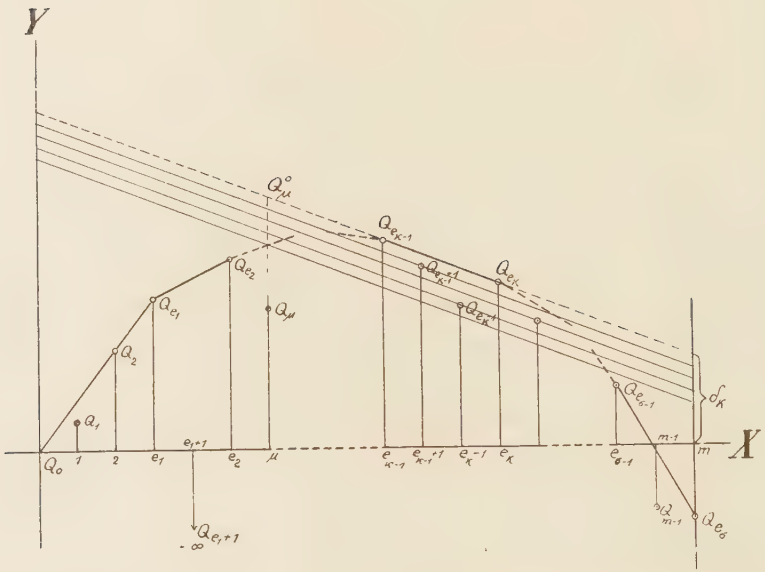
$$X = i, \; Y = k_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots m)$$

sein sollen, so daß jedem der $m+1$ Glieder auf der linken Seite von (1) einer der Punkte $Q_0, Q_1, \ldots Q_m$ entspricht, und umspannen diese Punkte (vgl. Figur) mit einem nach der Seite der positiven y konvexen Newton-Puiseux'schen Polygon. Nehmen wir an, das Polygon erhalte σ Seiten und demzufolge $\sigma+1$ Ecken, die von dem 1ten, $(e_1+1)^{\text{ten}}$, $(e_2+1)^{\text{ten}}$, . . . $(m+1)^{\text{ten}}$ Glieder der Gleichung (1) geliefert werden, so sind die Polygonecken der Reihe nach

$$Q_{e_0} = Q_0, \; Q_{e_1}, \; Q_{e_2}, \ldots Q_{e_\sigma} = Q_m,$$

und ihre Koordinaten

$$X = e_i, \; Y = k_{e_i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots \sigma).$$



Entsprechend den σ Seiten des Polygons bilden wir jetzt die σ Größen

$$q_i \equiv \frac{k_{e_i} - k_{e_{i-1}}}{e_i - e_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma), \tag{4}$$

die nach dem, was wir über die Koordinaten der Polygonecken gesagt haben, die trigonometrischen Tangenten der Winkel sind, die die Seiten des Polygons mit der positiven X-Achse bilden, so daß wir aus der Figur unmittelbar ersehen, daß

$$q_1 > q_2 > q_3 > \ldots > q_{\sigma-1} > q_\sigma \tag{5}$$

sein muß. Diese Größen sind auf Grund der Definition (4) und der über die $k_1, k_2, \ldots k_m$ gemachten Annahme im allgemeinsten Falle rationale Brüche, die wir also gleichnamig machen und in der Form

$$q_i = \frac{b_i}{b} \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma) \tag{6}$$

schreiben können, wobei die $b_1, b_2, \ldots b_\sigma$ ganze positive oder negative Zahlen einschließlich Null sind, b aber eine ganze positive Zahl bedeutet.

Bestimmen wir zu den durch die Gleichungen (3) und (6) definierten Zahlen a und b sowie zu den Nennern der rationalen Zahlen $k_1, k_2, \ldots k_m$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, so erhalten wir wieder eine ganze positive Zahl c, mit deren Hilfe wir uns den Stammbruch

$$\zeta \equiv \frac{1}{c} \tag{7}$$

verschaffen. Mit $c, \zeta, q_1, q_2, \ldots q_\sigma$ bilden wir nun die Reihen

$$S_i \equiv \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i} a_i^{\,x} \exp\left(\beta_i' x^{\frac{c-1}{c}} + \beta_i'' x^{\frac{c-2}{c}} + \ldots + \beta_i^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \cdot x^{\varrho_i}\left(1 + \frac{A_i'}{x^{\zeta}} + \frac{A_i''}{x^{2\zeta}} + \ldots\right) \qquad (i=1, 2, \ldots \sigma), \tag{8}$$

*)

worin die $a_i, \beta_i', \beta_i'', \ldots \beta_i^{(c-1)}, \varrho_i, A_i', A_i'', \ldots$ Konstanten bedeuten, und erhalten auf diese Weise zunächst gerade so viele Reihen, als unser Polygon Seiten hat, wobei diese Reihen so geordnet sind, daß zu jeder Polygonseite eine ganz bestimmte Reihe gehört. Wir wollen in den beiden nächsten Paragraphen untersuchen, ob es möglich ist die in den Reihen (8) enthaltenen, vorderhand noch willkürlich gelassenen Konstanten so zu bestimmen, daß die Gleichung (1) formal erfüllt wird, wenn wir für $y(x)$ nacheinander $S_1, S_2, \ldots S_\sigma$ substituieren.

§ 2.

Ist $\varkappa$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots \sigma$, so wählen wir aus (8) die Reihe

$$S_\varkappa \equiv \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa} a_\varkappa^{\,x} \exp\left(\beta_\varkappa' x^{\frac{c-1}{c}} + \beta_\varkappa'' x^{\frac{c-2}{c}} + \ldots + \beta_\varkappa^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \cdot x^{\varrho_\varkappa}\left(1 + \frac{A_\varkappa'}{x^{\frac{1}{c}}} + \frac{A_\varkappa''}{x^{\frac{2}{c}}} + \ldots\right) \tag{8a}$$

aus und erhalten durch die Substitution $y(x) = S_\varkappa$ aus (1) die Gleichung

*) Zur Vereinfachung des Satzes wurde statt e^z die in England vielfach übliche Schreibweise $\exp(z)$ gewählt.

$$\sum_{i=0}^{m} x^{k_i} P_i\left(\Gamma(x+m-i+1)\right)^{q_\varkappa} a_\varkappa{}^{x+m-i} \exp\left(\beta_\varkappa'(x+m-i)^{\frac{c-1}{c}}\right.$$

$$\left. + \ldots + \beta_\varkappa{}^{(c-1)}(x+m-i)^{\frac{1}{c}}\right)(x+m-i)^{\varrho_\varkappa}\left(1+\frac{A_\varkappa'}{(x+m-i)^{\frac{1}{c}}}\right.$$

$$\left. + \frac{A_\varkappa''}{(x+m-i)^{\frac{2}{c}}} + \ldots\right) = 0,$$

oder

$$\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa} a_\varkappa{}^{x} \exp\left(\beta_\varkappa' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_\varkappa{}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right)$$

$$\cdot x^{\varrho_\varkappa} \cdot \sum_{i=0}^{m} x^{(m-i)q_\varkappa + k_i} a_\varkappa{}^{m-i} P_i\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{m-i}{x}\right)\right]^{q_\varkappa}$$

(9)

$$\cdot \exp\left[\beta_\varkappa'\left((x+m-i)^{\frac{c-1}{c}} - x^{\frac{c-1}{c}}\right) + \ldots + \beta_\varkappa{}^{(c-1)}\left((x+m-i)^{\frac{1}{c}}\right.\right.$$

$$\left.\left. - x^{\frac{1}{c}}\right)\right]\left(1+\frac{m-i}{x}\right)^{\varrho_\varkappa}\left(1+\frac{A_\varkappa'}{(x+m-i)^{\frac{1}{c}}} + \ldots\right) = 0.$$

Wir wollen später in den Gleichungen (22) bis (25) zeigen, daß die Funktion

$$P_i\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{m-i}{x}\right)\right]^{q_\varkappa} \cdot \exp\left(\beta_\varkappa'(x+m-i)^{\frac{c-1}{c}}\right.$$

(9a)

$$\left. - \beta_\varkappa' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_\varkappa{}^{(c-1)}(x+m-i)^{\frac{1}{c}} - \beta_\varkappa{}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right)\left(1+\frac{m-i}{x}\right)^{\varrho_\varkappa}$$

sich nach fallenden Potenzen von $x^{\frac{1}{c}}$ entwickeln läßt, daß sie also in der Gestalt

$$C_i + \frac{C_i'}{x^{\frac{1}{c}}} + \frac{C_i''}{x^{\frac{2}{c}}} + \ldots \tag{9b}$$

geschrieben werden kann und durch diese Reihe asymptotisch dargestellt wird. Nehmen wir das einstweilen als bewiesen an, so vereinfacht sich Gleichung (9) zu

$$\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa} a_\varkappa{}^x \exp\left(\beta_\varkappa' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_\varkappa^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right)$$

$$\cdot x^{\theta_\varkappa} \cdot \sum_{i=0}^{m} x^{(m-i)q_\varkappa + k_i} a_\varkappa{}^{m-i} \left(C_i + \frac{C_i'}{x^{\frac{1}{c}}} + \frac{C_i''}{x^{\frac{2}{c}}} + \ldots\right) \tag{10}$$

$$\cdot \left(1 + \frac{A_\varkappa'}{(x+m-i)^{\frac{1}{c}}} + \ldots\right) = 0$$

und wir wenden uns zur Untersuchung des Exponenten $(m-i)\,q_\varkappa + k_i$ der unmittelbar nach dem Summenzeichen stehenden Potenz von x.

Zu diesem Zweck ordnen wir die $m+1$ Glieder der in Gleichung (10) enthaltenen Summe den Punkten Q_i unserer Figur so zu, daß jedem Glied der Summe ein Punkt Q_i mit gleichem Index i entspricht und umgekehrt. Unter der endlichen Anzahl der zu untersuchenden endlichen Größen

$$(m-i)\,q_\varkappa + k_i \qquad (i=0, 1, \ldots m) \tag{10a}$$

müssen sich ein oder mehrere Maximalwerte befinden und wir fragen uns, zu welchen der Q_i-Punkte Maximalwerte von (10a) gehören.

Den beiden Endpunkten der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite, $Q_{e_{\varkappa-1}}$ und $Q_{e_\varkappa}$, entsprechen zwei Werte von (10a), in denen $i = e_{\varkappa-1}$ und $i = e_\varkappa$ ist. Weil aber wegen der Definition (4)

$$q_\varkappa = \frac{k_{e_\varkappa} - k_{e_{\varkappa-1}}}{e_\varkappa - e_{\varkappa-1}} \tag{10b}$$

ist, so muß

$$k_{e_{\varkappa-1}} - e_{\varkappa-1}\, q_\varkappa = k_{e_\varkappa} - e_\varkappa\, q_\varkappa$$

und folglich

$$(m-e_{\varkappa-1})\, q_\varkappa + k_{e_{\varkappa-1}} = (m-e_\varkappa)\, q_\varkappa + k_{e_\varkappa} \tag{10c}$$

sein. Das heißt: zu den beiden Gliedern der Summe in (10), die den Endpunkten der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite entsprechen, gehören gleiche Exponenten von x.

Bezeichnen wir die laufenden Koordinaten mit X, Y, so lautet die Gleichung der zur Geraden verlängerten $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite

$$Y - k_{e_\varkappa} = q_\varkappa (X - e_\varkappa). \tag{11}$$

Nun sei μ eine der Zahlen 0, 1, . . . m mit Ausnahme von $e_{\varkappa-1}$ und $e_\varkappa$. Dann ist Q_μ ein Punkt mit den Koordinaten μ und k_μ, der nicht mit den Endpunkten der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite zusammenfällt. Für $X=\mu$, $Y=k_\mu$ lesen wir aber aus Gleichung (11) ab, daß Q_μ oberhalb, auf oder unterhalb der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite liegt, je nachdem

$$k_\mu - k_{e_\varkappa} \gtreqless q_\varkappa (\mu - e_\varkappa)$$

oder

$$(m-\mu)\, q_\varkappa + k_\mu \gtreqless (m - e_\varkappa)\, q_\varkappa + k_{e_\varkappa} \tag{11a}$$

ist. Das bedeutet zusammen mit (10c), daß die Glieder der Summe in (10) einen Exponenten von x haben, der größer, gleich oder kleiner ist als der Exponent der Endpunktsglieder, je nachdem die den Gliedern zugeordneten Punkte Q_i über, auf oder unter der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite liegen. Aus der Entstehungsart des Polygons geht jedoch unmittelbar hervor, daß keiner der Q_i-Punkte oberhalb der Geraden $Q_{e_{\varkappa-1}}\, Q_{e_\varkappa}$ liegen kann und auf ihr nur die Punkte sich befinden können, die zwischen den Polygonecken $Q_{e_{\varkappa-1}}$ und $Q_{e_\varkappa}$ eingeschlossen sind. Also lautet die Antwort auf unsere Frage: Die den Endpunkten der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite entsprechenden Glieder der in Gleichung (10) enthaltenen Summe haben den höchsten Exponenten von x. Die x-Exponenten der zwischen diesen beiden stehenden Glieder können diesem Maximalwert höchstens gleich sein, falls der ihnen zugeordnete Punkt Q_i auf der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite liegt. Die x-Exponenten aller übrigen Summanden müssen kleiner sein.

Auch die Differenz zwischen dem Maximalexponenten und einem beliebigen anderen können wir aus der Figur ablesen. Hat Q_μ wieder die oben angegebene Bedeutung und ist $Q_\mu{}^0$ der auf der Geraden $Q_{e_{\varkappa-1}}\, Q_{e_\varkappa}$ gelegene Punkt mit gleicher Abszisse μ, so ist (siehe Figur) seine Ordinate $k_\mu{}^0$ und für diese Ordinate finden wir aus Gleichung (11)

$$k_\mu{}^0 = k_{e_\varkappa} + (\mu - e_\varkappa)\, q_\varkappa .$$

Folglich ist

$$k_\mu{}^0 - k_\mu = k_{e_\varkappa} + (\mu - e_\varkappa)\, q_\varkappa - k_\mu = (m - e_\varkappa)\, q_\varkappa + k_{e_\varkappa} - [(m-\mu)\, q_\varkappa + k_\mu],$$

d. h. die Ordinatendifferenz $Q_\mu\, Q_\mu{}^0$ gibt an, um wieviel

der Exponent von x in dem zum Punkt Q_μ gehörigen Glied der Summe (10) hinter dem Maximalwert aller Exponenten zurückbleibt.

Führen wir nun die kürzere Schreibweise

$$(12) \qquad (m-i)\,q_\varkappa + k_i - [(m-e_\varkappa)\,q_\varkappa + k_{e_\varkappa}] \equiv -\mathfrak{k}_i \qquad (i=0,1,\ldots m)$$

ein, so sind die $\mathfrak{k}_i$ Null oder positive rationale Zahlen, die im allgemeinsten Falle den Nenner c haben und in unserer Figur durch die Ordinatendifferenzen zwischen jedem der Q_i-Punkte und der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite dargestellt werden. Wir können Gleichung (10) in die Form

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa}\alpha_\varkappa{}^x \exp\left(\beta_\varkappa' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_\varkappa^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_\varkappa+(m-e_\varkappa)\,q_\varkappa+k_{e_\varkappa}} \\ &\cdot \sum_{i=0}^{m} x^{-\mathfrak{k}_i}\,\alpha_\varkappa{}^{m-i}\,\mathfrak{B}_i \cdot \left(1 + \frac{A_\varkappa'}{(x+m-i)^{\frac{1}{c}}} + \ldots\right) = 0 \end{aligned}$$

bringen, wobei

$$(14) \qquad \mathfrak{B}_i \equiv C_i + \frac{C_i'}{x^{\frac{1}{c}}} + \frac{C_i''}{x^{\frac{2}{c}}} + \ldots \qquad (i=0,1,2,\ldots m)$$

ist.

Aus der geometrischen Interpretation der $\mathfrak{k}_i$ geht hervor, daß es mindestens zwei Indices i gibt, für die $\mathfrak{k}_i$ Null ist, nämlich die den Endpunkten der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite entsprechenden Werte $\mathfrak{k}_{e_{\varkappa-1}}$ und $\mathfrak{k}_{e_\varkappa}$. Das hat zur Folge, daß wir Gleichung (13) die Form

$$(15) \qquad \begin{aligned} &\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa}\alpha_\varkappa{}^x \exp\left(\beta_\varkappa' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_\varkappa^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \\ &\qquad \cdot x^{\varrho_\varkappa+(m-e_\varkappa)\,q_\varkappa+k_{e_\varkappa}}\,\Omega_\varkappa = 0 \end{aligned}$$

geben können, wobei

$$(16) \qquad \Omega_\varkappa \equiv E_\varkappa + E_\varkappa' x^{-\frac{1}{c}} + E_\varkappa'' x^{-\frac{2}{c}} + \ldots$$

ist, und es handelt sich jetzt für uns darum anzugeben, wie die $E_\varkappa, E_\varkappa', \ldots$ aus $C_i, C_i', \ldots$ und den $A_\varkappa', A_\varkappa'', \ldots$ der Gleichungen (13) und (14) sich zusammensetzen.

Zu diesem Zweck benützen wir die Entwicklungen

$$\frac{A_\varkappa^{(j)}}{(x+m-i)^{\frac{j}{c}}} = \frac{A_\varkappa^{(j)}}{x^{\frac{j}{c}}} + \frac{(m-i)\binom{-j/c}{1} A_\varkappa^{(j)}}{x^{\frac{j+c}{c}}} + \ldots \qquad (i=0,1,\ldots m;\ j=1,2,\ldots)$$

und erhalten so

$$1+\frac{A_z'}{(x+m-i)^{\frac{1}{c}}}+\frac{A_z''}{(x+m-i)^{\frac{2}{c}}}+\ldots=1+\frac{A_z'}{x^{\frac{1}{c}}}+\frac{A_z''}{x^{\frac{2}{c}}}+\ldots$$

(17)

$$+\frac{A_z^{(c)}}{x}+\frac{A_z^{(c+1)}+(m-i)\binom{-1/c}{1}A_z'}{x^{\frac{c+1}{c}}}+\frac{A_z^{(c+2)}+(m-i)\binom{-2/c}{1}A_z''}{x^{\frac{c+2}{c}}}+\ldots$$

Dividieren wir also (13) durch das Produkt vor dem Summenzeichen, so geht diese Gleichung wegen (14) und (17) in die Form

$$\sum_{i=0}^{m} x^{-\mathfrak{k}_i}\,a_z^{m-i}\Big[C_i+(C_iA_z'+C_i')\,x^{-\frac{1}{c}}+(C_iA_z''+C_i'A_z'+C_i'')\,x^{-\frac{2}{c}}$$

$$+\ldots+\left(C_iA_z^{(c)}+C_i'A_z^{(c-1)}+\ldots+C_i^{(c)}\right)x^{-1}+\left(C_iA_z^{(c+1)}+C_i'A_z^{(c)}\right.$$

(18)

$$+\ldots+C_i^{(c)}A_z'+C_i^{(c+1)}+C_i(m-i)\binom{-1/c}{1}A_z'\Big)\,x^{-\frac{c+1}{c}}+\left(C_iA_z^{(c+2)}\right.$$

$$+C_i'A_z^{(c+1)}+\ldots+C_i^{(c)}A_z''+C_i^{(c+1)}A_z'+C_i^{(c+2)}$$

$$\left.+C_i(m-i)\binom{-2/c}{1}A_z''+C_i'(m-i)\binom{-1/c}{1}A_z'\right)x^{-\frac{c+2}{c}}+\ldots\Big]=0$$

über und diesem Ausdruck haben wir die Gestalt

$$E_z+E_z'\,x^{-\frac{1}{c}}+E_z''\,x^{-\frac{2}{c}}+\ldots=0 \tag{19}$$

zu geben.

Ein Vergleich der Formen (18) und (19) beweist, daß es nur von der Beschaffenheit der $-\mathfrak{k}_i$ in (18) abhängt, welche der Koeffizienten in der eckigen Klammer von (18) die E_z, E_z', ... zusammensetzen. So wird z. B. E_z aus der Summe derjenigen in (18) enthaltenen C_i bestehen, für die $\mathfrak{k}_i=0$ ist. Das ist nach der Definition der $\mathfrak{k}_i$ nur bei solchen Gliedern der Summe (18) der Fall, deren Q_i-Punkte auf der z^{ten} Polygonseite liegen. Verabreden wir also, daß das Summenzeichen $\mathfrak{S}$ sich auf den Index i beziehen, aber nur für die Werte von i gelten soll, denen ein Punkt Q_i auf der z^{ten} Polygonseite entspricht, so können wir den Zusammenhang von E_z mit den $C_{e_{z-1}}$, $C_{e_{z-1}+1}$, ... C_{e_z} in der einfachen Form

$$E_z\equiv\mathfrak{S}\,C_i\,a_z^{m-i} \tag{20}$$

schreiben.

Denken wir uns zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite eine Parallele gezogen, deren Ordinaten alle um $\frac{1}{c}$ kleiner sind als die Ordinaten dieser Seite (vgl. Figur), so liegen auf dieser Parallelen alle Punkte Q_i, für welche $\mathfrak{k}_i$ in (18) den Wert $\frac{1}{c}$ hat. Wir führen also ein neues Summenzeichen $\mathfrak{S}'$ ein, das alle Indices i der auf der Parallelen gelegenen Punkte vereinigt, und finden aus (18) und (19)

$$E_\varkappa' \equiv \mathfrak{S}\,(C_i\,A_\varkappa' + C_i')\,a_\varkappa^{m-i} + \mathfrak{S}'\,C_i\,a_\varkappa^{m-i}. \tag{21}$$

Wollen wir auch $E_\varkappa''$ durch die $C_i^{(j)}$ ausdrücken, so brauchen wir nur eine zweite Parallele einzuführen, die mit der ersten die Ordinatendifferenz $\frac{1}{c}$ und mit der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite die Ordinatendifferenz $\frac{2}{c}$ hat, und eine zu ihr gehörende Summe $\mathfrak{S}''$ zu definieren. Haben wir in gleicher Weise fortfahrend ν Parallele nebst den dazu gehörenden Summenzeichen $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, . . . $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ definiert, so stellt sich der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der beiden Potenzreihen (18) und (19) einfach in der Weise dar, daß $E_\varkappa^{(\nu)}$ gleich der Summe der $\nu+1$ ersten Koeffizienten in (18) ist, wenn man mit dem Koeffizienten von $x^{-\frac{\nu}{c}}$ beginnend vor jeden Koeffizienten nacheinander eines der Zeichen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, . . . $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ setzt. Daraus ergibt sich, daß $E_\varkappa^{(\nu)}$ von allen $C_i^{(\nu+1)}$, $C_i^{(\nu+2)}$, . . . unabhängig ist.

Es ist klar, daß der Wert jeder Summe $\mathfrak{S}^{(i)}$, auf deren Parallelen zufällig kein Punkt Q_i liegt, gleich Null zu nehmen ist. Auch sei bemerkt, daß wir bei steigendem Index i der zu berechnenden $E_\varkappa^{(i)}$ mit der Einführung neuer Parallelen und Summenzeichen nicht in infinitum weiterzufahren brauchen. Wir müssen vielmehr nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen unseres Verfahrens zu einer Parallelen gelangen, die selbst noch einen oder mehrere der Q_i-Punkte enthält, während alle übrigen Punkte schon auf den vorhergehenden Parallelen liegen. Damit können wir die Zahl unserer Summenzeichen schließen. Die Terme in (18), deren zugeordnete Punkte im Unendlichen liegen, für die also $\mathfrak{k}_i = \infty$ ist, können selbstverständlich nie ein Glied zum Aufbau der $E_\varkappa^{(i)}$ beitragen.

§ 3.

Die bisherigen Untersuchungen setzen uns jetzt in den Stand unser am Schlusse des ersten Paragraphen ausgesprochenes Ziel etwas präziser zu formulieren. Die Gleichung (1) wird nämlich durch $y = S_\varkappa$ formal befriedigt, wenn Gleichung (18), und diese wieder, wenn Gleichung (19) erfüllt ist. Dies letztere ist nun der Fall, wenn die Gleichungen $E_\varkappa = 0$, $E_\varkappa' = 0$, $E_\varkappa'' = 0$, . . . stattfinden, und so kommen wir zu der genaueren Fragestellung, ob sich die in (8a) enthaltenen Konstanten $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa'$, . . . $\beta_\varkappa^{(c-1)}$, $\varrho_\varkappa$, $A_\varkappa'$, $A_\varkappa''$, . . . derart bestimmen lassen, daß die Gleichungen $E_\varkappa = 0$, $E_\varkappa' = 0$, . . . erfüllt sind.

Es ist zweckmäßig, wenn wir diese Frage in zwei Teile zerlegen und uns zunächst nur mit den $c+1$ ersten Gleichungen $E_\varkappa = 0$, $E_\varkappa' = 0$, . . . $E_\varkappa^{(c)} = 0$ beschäftigen. Die Erledigung der übrigen Gleichungen wird sich dann als zweiter Teil mit etwas vereinfachten Bedingungen daran anschließen lassen. So erwächst uns gemäß den Gleichungen (20) und (21) nebst den beschriebenen Verallgemeinerungen zuerst die Aufgabe die Form der Koeffizienten C_i, C_i', C_i'', . . . $C_i^{(c)}$ in Gleichung (10) zu bestimmen, d. h. wir müssen die Funktion (9a) in eine Reihe der Form (9b) entwickeln.

Was zunächst den ersten in (9a) enthaltenen Faktor P_i betrifft, so wollen wir den P_i definierenden Gleichungen (2) und (3) eine bequemere Gestalt geben. Erinnern wir uns, daß der Nenner des in (7) und (8) eingeführten Bruches $\frac{1}{c}$ den Nenner von $\frac{1}{a}$ als Faktor enthält, so können wir (2) die Form

$$(22) \qquad P_i = a_i + \frac{d_i'}{x^{\frac{1}{c}}} + \frac{d_i''}{x^{\frac{2}{c}}} + \ldots + \frac{d_i^{(c)}}{x} + \ldots \qquad (i = 1, \ldots m)$$

geben. Die Konstanten $d_i^{(j)}$ sind dabei entweder gleich den $a_i^{(j)}$ oder gleich Null.

Ferner haben wir die Entwicklungen

$$(23) \qquad \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{m-i}{x}\right)\right]^{q_\varkappa} = 1 + \frac{\binom{m-i+1}{2} q_\varkappa}{x} + \ldots$$

und

$$\exp\left[\beta_\varkappa'\left((x+m-i)^{\frac{c-1}{c}}-x^{\frac{c-1}{c}}\right)+\beta_\varkappa''\left((x+m-i)^{\frac{c-2}{c}}-x^{\frac{c-2}{c}}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+\beta_\varkappa^{(c-1)}\left((x+m-i)^{\frac{1}{c}}-x^{\frac{1}{c}}\right)\right]=1+\frac{(m-i)\binom{(c-1)c}{1}\beta_\varkappa'}{x^{\frac{1}{c}}}$$

(24)

$$+\frac{(m-i)\binom{(c-2)/c}{1}\beta_\varkappa''+\varphi_{i2}(\beta_\varkappa')}{x^{\frac{2}{c}}}+\frac{(m-i)\binom{(c-3)/c}{1}\beta_\varkappa'''+\varphi_{i3}(\beta_\varkappa'',\beta_\varkappa')}{x^{\frac{3}{c}}}$$

$$+\ldots+\frac{\varphi_{ic}(\beta_\varkappa^{(c-1)},\ldots\beta_\varkappa')}{x}+\ldots$$

und schließlich

$$\left(1+\frac{m-i}{x}\right)^{\varrho_\varkappa}=1+\frac{(m-i)\varrho_\varkappa}{x}+\ldots, \tag{25}$$

wobei wir die Glieder, die für unsern momentanen Zweck nicht in Betracht kommen und deren Koeffizienten komplizierter sind, nicht anzuschreiben brauchen. Die Funktionen φ_{ij} sind ganze rationale Funktionen der angegebenen Argumente, die mitunter, wie z. B. φ_{11}, auch identisch verschwinden können.

Nun zeigt ein Vergleich von (9a) und (9b), daß die Koeffizienten C_i, C_i', . . . durch Multiplikation der Reihen (22), (23), (24) und (25) entstehen und daß dabei für C_i, C_i', . . . $C_i^{(c-1)}$ nur (22) und (24) in Betracht kommen. So können wir also aus den Gleichungen (22) bis (25) ablesen:

$$\begin{aligned}
&C_i\equiv a_i,\\
&C_i'\equiv a_i(m-i)\binom{(c-1)/c}{1}\beta_\varkappa'+d_i',\\
&C_i''\equiv a_i(m-i)\binom{(c-2)/c}{1}\beta_\varkappa''+\psi_{i2}(\beta_\varkappa'),\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_i^{(c-1)}\equiv a_i(m-i)\binom{1\,c}{1}\beta_\varkappa^{(c-1)}+\psi_{i,c-1}(\beta_\varkappa^{(c-2)},\ldots\beta_\varkappa'),\\
&C_i^{(c)}\equiv a_i(m-i)\varrho_\varkappa+\psi_{ic}(\beta_\varkappa^{(c-1)},\ldots\beta_\varkappa',q_\varkappa).
\end{aligned} \tag{26}$$

Hierbei bezeichnen die ψ_{ij} wieder ganze rationale Funktionen, deren genaue Form wir nicht zu kennen brauchen.

Die erste dieser Gleichungen gibt im Hinblick auf Gleichung (20)

$$E_\varkappa\equiv\mathfrak{S}\,a_i\,\alpha_\varkappa^{m-i}=0, \tag{27}$$

eine Gleichung, die nur die Konstante $\alpha_\varkappa$ als Unbekannte enthält

und daher zur Bestimmung von $\alpha_\varkappa$ dient. Da das Summenzeichen $\mathfrak{S}$ vom Index $i = e_{\varkappa-1}$ bis zum Index $i = e_\varkappa$ sich erstreckt und alle a_i von Null verschieden sind, so muß die Gleichung (27) vom Grade $m - e_{\varkappa-1}$ in $\alpha_\varkappa$ sein. Wir können jedoch durch ${\alpha_\varkappa}^{m-e_\varkappa}$ dividieren und erhalten

$$(27a)\quad a_{e_{\varkappa-1}} {\alpha_\varkappa}^{e_\varkappa - e_{\varkappa-1}} + \ldots + a_{e_{\varkappa-1}+i} {\alpha_\varkappa}^{e_\varkappa - e_{\varkappa-1}-i} + \ldots + a_{e_\varkappa} = 0,$$

d. h. Gleichung (27) hat $e_\varkappa - e_{\varkappa-1}$ von Null verschiedene Wurzeln. Heißen wir $E_\varkappa = 0$ die zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite gehörige „charakteristische Gleichung", so lautet unser Ergebnis: Die zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite gehörige charakteristische Gleichung ist vom Grade $m - e_{\varkappa-1}$ in $\alpha_\varkappa$ und liefert für $\alpha_\varkappa$ so viele von Null verschiedene Werte, als die Abszissendifferenz der Endpunkte der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite beträgt, d. h. also mindestens einen.

Wir machen zur Fortführung unserer Untersuchungen die Annahme, daß unter den von Null verschiedenen Wurzeln der zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite gehörenden charakteristischen Gleichung nicht zwei einander gleich sein sollen.

Haben wir für $\alpha_\varkappa$ irgend einen der $e_\varkappa - e_{\varkappa-1}$ von Null verschiedenen Werte gewählt, so gibt uns (21) mit Berücksichtigung von (20) für $E_\varkappa'$ den Ausdruck

$$E_\varkappa \cdot A_\varkappa' + \mathfrak{S}\, C_i' {\alpha_\varkappa}^{m-i} + \mathfrak{S}'\, C_i {\alpha_\varkappa}^{m-i},$$

dessen erstes Glied jedoch wegen (27) verschwindet. Setzen wir ihn gleich Null, so erhalten wir die Gleichung

$$(28)\quad E_\varkappa' \equiv \mathfrak{S}\, C_i' {\alpha_\varkappa}^{m-i} + \mathfrak{S}'\, C_i {\alpha_\varkappa}^{m-i} = 0$$

und die zwei ersten Gleichungen in (26) zeigen, daß wir (28) die Gestalt

$$(28a)\quad \binom{(c-1)/c}{1} \beta_\varkappa' \cdot \mathfrak{S}\, a_i (m-i)\, {\alpha_\varkappa}^{m-i} + \chi_{\varkappa 1}(\alpha_\varkappa) = 0$$

geben können, worin $\chi_{\varkappa 1}$ eine ganze rationale Funktion bedeutet. Diese Gleichung ist linear in ${}_1\beta_\varkappa'$ und zwar ist der Koeffizient von ${}_1\beta_\varkappa'$ nicht Null, weil $\binom{(c-1)/c}{1} \alpha_\varkappa \mathfrak{S}\, a_i (m-i)\, {\alpha_\varkappa}^{m-i-1}$ der mit $\binom{(c-1)\,c}{1} \alpha_\varkappa$ multiplizierte Differentialquotient der linken Seite von Gleichung (27) ist und also auf Grund der über die Wurzeln der charakteristischen Gleichung gemachten Annahme nicht verschwindet. So

dient uns Gleichung (28) oder (28a) zur eindeutigen Bestimmung von $\beta_\varkappa'$.

Ist $\beta_\varkappa'$ bestimmt, so lesen wir aus den Gleichungen (18) und (19) $E_\varkappa''$ ab und finden zunächst wegen der Definitionen (20) und (28) den Ausdruck

$$E_\varkappa \cdot A_\varkappa'' + E_\varkappa' \cdot A_\varkappa' + \mathfrak{S} C_i'' \alpha_\varkappa^{m-i} + \mathfrak{S}' C_i' \alpha_\varkappa^{m-i} + \mathfrak{S}'' C_i \alpha_\varkappa^{m-i}.$$

Weil aber hierin die beiden ersten Glieder verschwinden, so erhalten wir durch Nullsetzen die Gleichung

$$E_\varkappa'' \equiv \mathfrak{S} C_i'' \alpha_\varkappa^{m-i} + \mathfrak{S}' C_i' \alpha_\varkappa^{m-i} + \mathfrak{S}'' C_i \alpha_\varkappa^{m-i} = 0. \tag{29}$$

Die drei ersten der Gleichungen (26) ermöglichen es (29) die Form

$$\binom{(c-2)/c}{1} \beta_\varkappa'' \cdot \mathfrak{S} a_i (m-i) \alpha_\varkappa^{m-i} + \chi_{\varkappa 2}(\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa') = 0 \tag{29a}$$

zu geben. Aus den gleichen Gründen wie oben ist der Koeffizient der zu bestimmenden Konstanten $\beta_\varkappa''$ von Null verschieden und (29a) gibt einen eindeutigen Wert für $\beta_\varkappa''$.

Fahren wir schrittweise so weiter, so läßt die Beschaffenheit der Koeffizienten der Potenzreihe (18) erkennen, daß für $\nu < c$ die ν ersten Glieder eines jeden $E_\varkappa^{(\nu)}$ die Form

$$E_\varkappa \cdot A_\varkappa^{(\nu)} + E_\varkappa' \cdot A_\varkappa^{(\nu-1)} + \ldots + E_\varkappa^{(\nu-1)} A_\varkappa'$$

haben und daher wegen

$$E_\varkappa^{(j)} = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots \nu-1)$$

verschwinden. Die Gleichungen (26) beweisen dann, daß $E_\varkappa^{(\nu)} = 0$ frei von $\beta_\varkappa^{(\mu)}$ $(\mu > \nu)$ und linear in $\beta_\varkappa^{(\nu)}$ ist. Der Koeffizient dieser Größe ist der mit $\binom{(c-\nu)c}{1} \alpha_\varkappa$ multiplizierte Differentialquotient der charakteristischen Gleichung und also nicht Null. So erhalten wir nacheinander die zu einem Wert von $\alpha_\varkappa$ gehörigen eindeutig bestimmten Größen $\beta_\varkappa'$, $\beta_\varkappa''$, $\ldots$ $\beta_\varkappa^{(c-1)}$ und finden dann für $E_\varkappa^{(c)}$ den Ausdruck

$$E_\varkappa \cdot A_\varkappa^{(c)} + E_\varkappa' \cdot A_\varkappa^{(c-1)} + \ldots + E_\varkappa^{(c-1)} A_\varkappa' + \mathfrak{S} C_i^{(c)} \alpha_\varkappa^{m-i} + \ldots + \mathfrak{S}^{(c)} C_i \alpha_\varkappa^{m-i}.$$

Hier sind die c ersten Glieder Null und in

$$E_\varkappa^{(c)} \equiv \mathfrak{S} C_i^{(c)} \alpha_\varkappa^{m-i} + \ldots + \mathfrak{S}^{(c)} C_i \alpha_\varkappa^{m-i} = 0 \tag{30}$$

ist, wie die letzte Gleichung in (26) beweist, $\varrho_\varkappa$ linear mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten enthalten, mithin ebenfalls eindeutig bestimmt.

So haben wir also aus den $c+1$ Gleichungen $E_\varkappa = 0$, $E_\varkappa' = 0, \ldots E_\varkappa^{(c)} = 0$ die $c+1$ Konstanten $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa', \ldots \beta_\varkappa^{(c-1)}, \varrho_\varkappa$ gefunden und infolge davon dürfen wir alle Koeffizienten C_i, C_i', C_i'', ... als bekannt ansehen. Denn sie sind die Koeffizienten einer Potenzreihe, die das Produkt der Entwicklungen (22), (23), (24) und (25) ist, und diese Entwicklungen enthalten außer gegebenen Zahlen nur noch eben jene $c+1$ Konstanten, deren Wert wir schon festgelegt haben. Wir kommen daher zur Erledigung des zweiten Teiles der am Anfang dieses Paragraphen gestellten Frage, in welcher Weise nämlich die noch unbestimmten Konstanten $A_\varkappa'$, $A_\varkappa''$ ... aus den Gleichungen $E_\varkappa^{(c+1)} = 0$, $E_\varkappa^{(c+2)} = 0$, ... gefunden werden.

Wir wissen, daß $E_\varkappa^{(c+1)}$ die Summe der $c+2$ ersten Koeffizienten in (18) darstellt, wobei diese nur noch der Reihe nach mit den zu den Parallelen gehörenden Summenzeichen zu versehen sind. Daher enthält $E_\varkappa^{(c+1)}$ zunächst die Konstanten $A_\varkappa^{(c+1)}, \ldots A_\varkappa'$ bezw. mit $E_\varkappa, E_\varkappa', \ldots E_\varkappa^{(c)}$ multipliziert, und da diese Ausdrücke Null sind, lesen wir aus den Koeffizienten bis zu dem von $x^{-\frac{c+1}{c}}$ in (18) ab

$$
\begin{aligned}
E_\varkappa^{(c+1)} \equiv\ & \mathfrak{S}\, C_i^{(c+1)}\, \alpha_\varkappa{}^{m-i} + A_\varkappa' \binom{-1/c}{1} \cdot \mathfrak{S}\, a_i\,(m-i)\, \alpha_\varkappa{}^{m-i} \\
& + \mathfrak{S}'\, C_i^{(c)}\, \alpha_\varkappa{}^{m-i} + \ldots + \mathfrak{S}^{(c+1)}\, C_i\, \alpha_\varkappa{}^{m-i} = 0.
\end{aligned} \tag{31}
$$

Die Gesamtheit aller Glieder mit Ausnahme des zweiten ist eine ganze rationale Funktion $\chi_{\varkappa, c+1}$ der $c+1$ bekannten Konstanten, während der Koeffizient von $A_\varkappa'$ wieder wie früher den Differentialquotienten von $E_\varkappa$, jetzt aber mit dem Faktor $\binom{-1\ c}{c}\ \alpha_\varkappa$ versehen, darstellt und daher nicht verschwindet. Mithin bestimmt (31) eindeutig den Wert von $A_\varkappa'$.

Würden wir jetzt aus (18) und (19) $E_\varkappa^{(c+2)}$ ablesen, so würden zuerst $A_\varkappa^{(c+2)}, \ldots A_\varkappa''$ wieder mit $E_\varkappa, E_\varkappa', \ldots E_\varkappa^{(c)}$ multipliziert auftreten und somit herausfallen. Was dann von den Koeffizienten von $x^{-\frac{c+2}{c}}$ bis zum konstanten Glied C_i in (18) übrig bliebe, ließe sich als eine Summe schreiben, die aus einer ganzen rationalen Funktion der $c+2$ berechneten Konstanten $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa', \ldots \beta_\varkappa^{(c-1)}, \varrho_\varkappa, A_\varkappa'$ bestünde

und aus $A_\varkappa''$, das wieder mit einem von Null verschiedenen Ausdruck multipliziert wäre. Wir erkennen aber, daß wir dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen können. Denn wenn wir irgend eine Gleichung z. B. $E_\varkappa^{(c+\nu)} = 0$ herstellen wollen, so enthält dieser Ausdruck der Reihe nach $A_\varkappa^{(c+\nu)}$, $A_\varkappa^{(c+\nu-1)}$, . . . $A_\varkappa^{(\nu)}$, die aber, wie das Bildungsgesetz der Koeffizienten in (18) zeigt, mit $E_\varkappa$, $E_\varkappa'$, . . . $E_\varkappa^{(\nu)}$ multipliziert sind und daher verschwinden. Aus Formel (17) und der unmittelbar vorhergehenden ist ersichtlich, daß der Koeffizient von $x^{-\frac{c+\nu}{c}}$ in (17) nach dem ersten Glied $A_\varkappa^{(c+\nu)}$ als zweites den Ausdruck $(m-i)\binom{-\nu/c}{1} A_\varkappa^{(\nu)}$ enthalten muß, während es auf die etwa noch folgenden nicht ankommt, da sie nur die schon bestimmten $A_\varkappa^{(\nu-c)}$, $A_\varkappa^{(\nu-2c)}$, . . . enthalten. Folglich tritt in $E_\varkappa^{(c+\nu)}$ außer den bekannten Größen $A_\varkappa'$, $A_\varkappa''$, . . . $A_\varkappa^{(\nu-1)}$ nur ein in $A_\varkappa^{(\nu)}$ lineares Glied auf, dessen Koeffizient die Form $\binom{-\nu/c}{1} \alpha_\varkappa \cdot \mathbf{S}\, a_i (m-i)\, \alpha_\varkappa^{m-i-1}$ hat, d. h. von Null verschieden ist. Damit haben wir nachgewiesen, daß die Gleichungen

$$E_\varkappa^{(c+i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

nacheinander die Konstanten $A_\varkappa'$, $A_\varkappa''$, . . . eindeutig bestimmen.

Die Untersuchungen in diesem und dem vorigen Paragraphen beweisen, daß jede der σ Reihen (8) die Differenzengleichung (1) formal erfüllt. Dabei gibt es σ charakteristische Gleichungen, von denen jede $e_i - e_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots \sigma)$ von Null verschiedene Wurzeln liefert. Bezeichnen wir diese mit α_{ij} $(i = 1, 2, \ldots \sigma;$ $j = 1, 2, \ldots e_i - e_{i-1})$, so ist wegen

$$(e_1 - e_0) + (e_2 - e_1) + \ldots + (e_\sigma - e_{\sigma-1}) = e_\sigma = m$$

die Anzahl der von Null verschiedenen α_{ij} gleich m, der Ordnungszahl der Differenzengleichung (1). Zu jedem α_{ij} gehört eine Gruppe eindeutig bestimmter Konstanten, die wir mit β_{ij}', β_{ij}'', . . . $\beta_{ij}^{(c-1)}$, ϱ_{ij}, A_{ij}', A_{ij}'' . . . bezeichnen wollen. So erhalten wir das Resultat: Die Differenzengleichung (1) hat σ charakteristische Gleichungen

$$E_i \equiv a_{e_{i-1}} \alpha^{m-e_{i-1}} + \ldots + a_{e_i} \alpha^{m-e_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma), \tag{32}$$

deren jede $e_i - e_{i-1}$ von Null verschiedene Wurzeln liefert. Sind die zu einer charakteristischen Gleichung gehörenden Wurzeln α_{ij} $(j = 1, 2, \ldots e_i - e_{i-1})$ von einander

verschieden, so wird die Gleichung (1) durch die m Reihen

$$S_{ij} = \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i} a_{ij}^{x} \exp\left({}_i\beta_{ij}' \, x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + {}_i\beta_{ij}^{(c-1)} \, x^{\frac{1}{c}}\right)$$

(32a)
$$\cdot x^{\varrho_{ij}} \left(1 + \frac{A_{ij}'}{x^{\frac{1}{c}}} + \frac{A_{ij}''}{x^{\frac{2}{c}}} + \ldots\right) \qquad (i=1, 2, \ldots \sigma;\ j=1, 2, \ldots e_i - e_{i-1})$$

formal befriedigt.

§ 4.

Wir kommen nun zu der Aufgabe für die Integrale der vorgelegten Differenzengleichung m^{ter} Ordnung analytische Ausdrücke zu finden und bilden zu diesem Zweck entsprechend den m Reihen (32a) die folgenden m Funktionen

(33)
$$q_{ij} \equiv \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i} a_{ij}^{x} \exp\left({}_i\beta_{ij}' \, x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{ij}^{(c-1)} \, x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_{ij}} \Phi_{ij}(x)$$
$$(i=1, 2, \ldots \sigma;\ j=1, 2, \ldots e_i - e_{i-1}).$$

Dabei seien die

(33a)
$$\Phi_{ij}(x) \equiv 1 + \frac{A_{ij}'}{x^{\frac{1}{c}}} + \frac{A_{ij}''}{x^{\frac{2}{c}}} + \ldots + \frac{A_{ij}^{(n)}}{x^{\frac{n}{c}}}$$

ganze Funktionen n^{ten} Grades von $x^{-\frac{1}{c}}$ und n sei eine der Zahlen $0, 1, 2 \ldots$

Setzen wir in der mit (1) bezeichneten Gleichung $D(y) = 0$ für y nacheinander die Reihen (32a), so können wir auf Grund unserer bisherigen Untersuchungen — wir brauchen nur in (15) und (16) den Index $\varkappa$ durch ij zu ersetzen — diesen Ausdrücken die Form

(34)
$$D(S_{ij}) = \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i} a_{ij}^{x} \exp\left(\beta_{ij}' \, x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{ij}^{(c-1)} \, x^{\frac{1}{c}}\right)$$
$$\cdot x^{\varrho_{ij} + (m-e_i) q_i + k e_i} \mathfrak{Q}_{ij}(x) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots \sigma;\ j=1, 2, \ldots e_i - e_{i-1})$$

geben. Sobald wir aber in (1) die q_{ij} für y substituieren, stehen uns die Konstanten $A_{ij}^{(n+1)}$, $A_{ij}^{(n+2)}$, ... nicht mehr zur Verfügung, weil sie in (33a) durch Null ersetzt sind, und es sind infolgedessen nur die $n + c + 1$ ersten Koeffizienten der Potenzreihen $\mathfrak{Q}_{ij}$, nämlich E_i, E_{ij}', E_{ij}'', ... $E_{ij}^{(n+c)}$, gleich Null, während die folgenden nicht

notwendig Null sein müssen. Daher können wir die $D(\varphi_{ij})$ sicherlich in der Form

$$(35)\quad D(\varphi_{ij}) = -\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i} a_{ij}{}^{x} \exp\left(\beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \cdot x^{\varrho_{ij}+(m-e_i)q_i+k e_i-(n+c+1)/c}\, \mathfrak{q}_{ij}(x) \qquad (i=1,2,\ldots\sigma;\ j=1,2,\ldots \mathfrak{e}_i)$$

schreiben, wenn wir $e_i - e_{i-1}$ mit $\mathfrak{e}_i$ bezeichnen und die $\mathfrak{q}_{ij}$ Potenzreihen von $x^{-\frac{1}{c}}$ bedeuten.

Führen wir noch die Abkürzung

$$(36)\quad e_\sigma - e_{\sigma-1} \equiv \mathfrak{e}_\sigma \equiv \varsigma$$

ein, so müssen die m durch Gleichung (33) und (33a) definierten Funktionen $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots \varphi_{\sigma\varsigma}$ der Differenzengleichung m^{ter} Ordnung

$$(37)\quad D_1(y) \equiv (-1)^m \cdot \frac{\begin{vmatrix} y(x) & \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \cdots & \varphi_{\sigma\varsigma}(x) \\ y(x+1) & \varphi_{11}(x+1) & \varphi_{12}(x+1) & \cdots & \varphi_{\sigma\varsigma}(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y(x+m) & \varphi_{11}(x+m) & \varphi_{12}(x+m) & \cdots & \varphi_{\sigma\varsigma}(x+m) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \cdots & \varphi_{\sigma\varsigma}(x) \\ \varphi_{11}(x+1) & \varphi_{12}(x+1) & \cdots & \varphi_{\sigma\varsigma}(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{11}(x+m-1) & \varphi_{12}(x+m-1) & \cdots & \varphi_{\sigma\varsigma}(x+m-1) \end{vmatrix}} = 0$$

genügen. Bezeichnen wir die im Nenner stehende Determinante mit $\Delta(x)$, so ist

$$\Delta(x) \equiv \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{\sigma\varsigma}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{11}(x+m-1) & \cdots & \varphi_{\sigma\varsigma}(x+m-1) \end{vmatrix} = \left(\Gamma(x+1)\right)^{\sum_{i=1}^{\sigma} \mathfrak{e}_i q_i} \cdot (a_{11}\ldots a_{\sigma\varsigma})^x \exp\left(\sum_i \sum_j \beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right)$$

$$(38)\quad \cdot x^{\sum_i \sum_j \varrho_{ij}} \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{\sigma\varsigma} \\ x^{q_1} \pi_{11}' & x^{q_1} \pi_{12}' & \cdots & x^{q_\sigma} \pi_{\sigma\varsigma}' \\ x^{2q_1} \pi_{11}'' & x^{2q_1} \pi_{12}'' & \cdots & x^{2q_\sigma} \pi_{\sigma\varsigma}'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{(m-1)q_1} \pi_{11}^{(m-1)} & x^{(m-1)q_1} \pi_{12}^{(m-1)} & \cdots & x^{(m-1)q_\sigma} \pi_{\sigma\varsigma}^{(m-1)} \end{vmatrix},$$

worin die $\pi_{ij}^{(k)}$ Potenzreihen von $x^{-\frac{1}{c}}$ bedeuten. Denn jedes $\pi_{ij}^{(k)}$ ist anfänglich die Funktion

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{k}{x}\right)\right|^{q_i} a_{ij}^{\,k} \exp\left(\beta_{ij}'\left((x+k)^{\frac{c-1}{c}}-x^{\frac{c-1}{c}}\right)+\ldots\right)$$
$$\cdot\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\varrho_{ij}}\left(1+\frac{A_{ij}}{(x+k)^{\frac{1}{c}}}+\ldots+\frac{A_{ij}^{(n)}}{(x+k)^{\frac{n}{c}}}\right)$$

und läßt sich auf Grund von (23), (24) und (25) nach Potenzen von $x^{-\frac{1}{c}}$ entwickeln. Dabei wird das von $x^{-\frac{1}{c}}$ freie Glied gleich $a_{ij}^{(k)}$, also nicht Null.

Deshalb erhalten wir

$$\Delta(x)=\left(\Gamma(x+1)\right)^{\sum e_i q_i}(a_{11}\ldots a_{\sigma\varsigma})^x \exp\left(\sum_i\sum_j \beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}}+\ldots\right.$$
(38a)
$$\left.+\beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\sum_i\sum_j \varrho_{ij}+d}\,\Phi(x).$$

Der Exponent d stellt die Summe aller Exponenten von x dar, die in der von links unten nach rechts oben gehenden Diagonale der letzten Determinante von (38) enthalten sind, d. h. es ist

$$d\equiv(m-1)q_1+(m-2)q_1+\ldots+(m-e_1)q_1+(m-e_1-1)q_\sigma$$
(38b)
$$+\ldots+(m-e_2)q_2+(m-e_2-1)q_3+\ldots+(m-e_{\sigma-1}-1)q_2$$
$$+\ldots+2q_\sigma+q_\sigma.$$

$\Phi(x)$ bedeutet eine nach Potenzen von $x^{\frac{1}{c}}$ fallende Reihe, die für $x=\infty$ nicht Null wird. Denn ihr absolutes Glied ist

$$(38c)\quad \begin{vmatrix} a_{11}^{m-e_1} & \ldots & a_{1\varepsilon_1}^{m-e_1} \\ a_{11}^{m-e_1+1} & \ldots & a_{1\varepsilon_1}^{m-e_1+1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{11}^{m-1} & \ldots & a_{1\varepsilon_1}^{m-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{21}^{m-e_2} & \ldots & a_{2\varepsilon_2}^{m-e_2} \\ a_{21}^{m-e_2+1} & \ldots & a_{2\varepsilon_2}^{m-e_2+1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{21}^{m-e_1-1} & \ldots & a_{2\varepsilon_2}^{m-e_1-1} \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_{\sigma 1} & \ldots & a_{\sigma\varsigma} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{\sigma 1}^{\varsigma-1} & \ldots & a_{\sigma\varsigma}^{\varsigma-1} \end{vmatrix}.$$

Aus der Gleichung (38a) folgt, daß wir (37) in der Form

$$
\begin{aligned}
&D_1(y) = y(x+m) + x^{q_1} p_1\, y(x+m-1) + x^{2q_1} p_2\, y(x+m-2) \\
&+ \ldots + x^{e_1 q_1} p_{e_1}\, y(x+m-e_1) + x^{e_1 q_1 + q_2} p_{e_1+1}\, y(x+m-e_1-1) \\
&+ \ldots + x^{e_1 q_1 + (e_2 - e_1) q_2} p_{e_2}\, y(x+m-e_2) + \ldots \\
&+ x^{\sum_{i=1}^{\sigma} (e_i - e_{i-1}) q_i} p_m\, y(x) = 0
\end{aligned} \tag{39}
$$

oder wegen

$$e_1 q_1 = k_{e_1},\ e_1 q_1 + (e_2 - e_1) q_2 = k_{e_2},\ \ldots\ \sum_{i=1}^{\sigma} (e_i - e_{i-1}) q_i = k_m$$

in der Form

$$
\begin{aligned}
D_1(y) = {} & y(x+m) + x^{q_1} p_1 (x+m-1) + \ldots + x^{k_{e_1}} p_{e_1}\, y(x+m-e_1) \\
& + \ldots + x^{k_{e_2}} p_{e_2}\, y(x+m-e_2) + \ldots + x^{k_m} p_m\, y(x) = 0
\end{aligned} \tag{39a}
$$

schreiben können. Die $p_1, p_2, \ldots p_m$ sind Potenzreihen von $x^{-\frac{1}{c}}$.

Da die genaue Kenntnis der Form dieser Potenzreihen für unsere Untersuchungen unnötig ist, so sei ohne nähere Ausführung beiläufig erwähnt, daß aus (37), (38a) und (38c) zu entnehmen ist, daß die absoluten Glieder dieser Potenzreihen symmetrische Funktionen der Wurzeln der charakteristischen Gleichungen sind, so daß das absolute Glied von p_1 gleich dem zweiten Koeffizienten in der Gleichung $E_1 = 0$ ist, nachdem man den ersten Koeffizienten gleich 1 gemacht hat. Das absolute Glied von p_2 ist gleich dem dritten Koeffizienten in $E_1 = 0$ usw., bis schließlich das absolute Glied von p_m gleich dem letzten Koeffizienten in der letzten charakteristischen Gleichung $E_\sigma = 0$ ist, multipliziert mit den Wurzeln der vorangehenden. Die absoluten Glieder der Reihen $p_1, p_2, \ldots p_m$ können also Null sein mit Ausnahme derer, die zu den Reihen $p_{e_1}, p_{e_2}, \ldots p_m$ gehören, da diese bezw.

$$a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1e_1}, \ldots, a_{11}\, a_{12} \ldots a_{\sigma\varsigma}$$

sind. Nach (39a) ist daher $D_1(y) = 0$ eine lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung, zu der das gleiche Newton-Puiseuxsche Polygon gehört wie zu der vorgelegten Gleichung (1).

Zu D und D_1 definieren wir noch das Operationssymbol

$$D_2(\mathfrak{y}) \equiv D_1(\mathfrak{y}) - D(\mathfrak{y}) \tag{40}$$

oder, wie aus (1) und (39a) ersichtlich ist,

$$\begin{aligned} D_2(\mathfrak{y}) = {} & x^{q_1}(p_1 - x^{k_1 - q_1} P_1)\,\mathfrak{y}(x+m-1) + x^{2q_1}(p_2 - x^{k_2 - 2q_1} P_2) \\ & \cdot \mathfrak{y}(x+m-2) + \ldots + x^{k_{e_1}}(p_{e_1} - P_{e_1})\,\mathfrak{y}(x+m-e_1) + \ldots \\ & + x^{k_{e_2}}(p_{e_2} - P_{e_2})\,\mathfrak{y}(x+m-e_2) + \ldots + x^{k_m}(p_m - P_m)\,\mathfrak{y}(x), \end{aligned} \tag{40a}$$

wobei die in den Klammern stehenden Differenzen wieder Potenzreihen von $x^{-\frac{1}{c}}$ sind. Weil gemäß der Definition (37) von $D_1(\mathfrak{y})$

$$D_1(\varphi_{ij}) = 0 \tag{41}$$

sein muß, so erhalten wir aus (40)

$$D_2(\varphi_{ij}) = -D(\varphi_{ij})$$

und folglich mit Berücksichtigung der Gleichung (35)

$$\begin{aligned} D_2(\varphi_{ij}) = {} & \big(\Gamma(x+1)\big)^{q_i} a_{ij}{}^{x} \exp\left({}_i\beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + {}_i\beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \\ & \cdot x^{\varrho_{ij} + (m-e_i)q_i + k_{e_i} - (n+c+1)/c}\, \mathfrak{q}_{ij}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma;\ j = 1, 2, \ldots e_i). \end{aligned} \tag{41a}$$

Es sei uns gestattet jetzt gleich eine Eigenschaft der durch (38) definierten Determinante $\Delta(x)$ abzuleiten, die wir später brauchen werden. Bezeichnen wir die Unterdeterminanten der letzten Zeile mit $\Delta_{11}(x)$, $\Delta_{12}(x)$, $\ldots$ $\Delta_{\sigma\varsigma}(x)$, so finden wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{11}(x)}{\Delta(x)} = {} & \big(\Gamma(x+1)\big)^{-q_1} a_{11}{}^{-x} \exp\left(-\beta_{11}' x^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{11}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \\ & \cdot x^{-\varrho_{11} - d_1}\, \Pi_{11}(x) \\ \frac{\Delta_{12}(x)}{\Delta(x)} = {} & \big(\Gamma(x+1)\big)^{-q_1} a_{12}{}^{-x} \exp\left(-\beta_{12}' x^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{12}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \\ & \cdot x^{-\varrho_{12} - d_1}\, \Pi_{12}(x) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

wobei $d_1 \equiv k_{e_0} + (m - e_0 - 1)q_1 = (m-1)q_1$ ist. Allgemein haben wir also

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{ij}(x)}{\Delta(x)} = {} & \big(\Gamma(x+1)\big)^{-q_i} a_{ij}{}^{-x} \exp\left(-\beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \\ & \cdot x^{-\varrho_{ij} - d_i}\, \Pi_{ij}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma;\ j = 1, 2, \ldots e_i), \end{aligned} \tag{42}$$

wobei die $\Pi_{ij}(x)$ wieder Potenzreihen von $x^{-\frac{1}{c}}$, die $d_1, d_2, \ldots d_\sigma$ aber durch die Gleichungen

(42a) $$d_i \equiv k_{e_{i-1}} + (m - e_{i-1} - 1)\, q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma)$$

bestimmt sind.

Wir wollen zur Darstellung der Integrale unserer vorgelegten Differenzengleichung die von Herrn Horn angegebene Methode sukzessiver Approximation benützen und können nach den soeben vorausgeschickten Vereinbarungen den weiteren Verlauf unserer Untersuchung in Kürze etwa folgendermaßen angeben. Mit Rücksicht auf (40) können wir die ursprüngliche Differenzengleichung

$$D(y) = 0$$

in der Form

(43) $$D_1(y) = D_2(y)$$

schreiben. Nachdem wir aus den φ_{ij} ein bestimmtes ausgewählt und es als bekannte Funktion von x mit $u_0(x)$ bezeichnet haben, wollen wir eine unbegrenzte Serie von Funktionen $u_1(x), u_2(x) \ldots$ in folgender Weise definieren: Die Gleichung

(43a) $$D_1\big(u_1(x)\big) = D_2\big(u_0(x)\big)$$

ist eine inhomogene lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung, die uns die neue Funktion $u_1(x)$ bei passender Wahl der m Integrationskonstanten definiert. In gleicher Weise erhalten wir aus

(43b) $$D_1\big(u_2(x)\big) = D_2\big(u_1(x)\big)$$

die Funktion $u_2(x)$ und wir wollen schrittweise so fortfahrend $u_3(x), u_4(x), \ldots$ berechnen. Oder allgemein gesprochen: wir definieren die Funktion $u_{\nu+1}(x)$ als Integral der inhomogenen linearen Differenzengleichung

(43c) $$D_1\big(u_{\nu+1}(x)\big) = D_2\big(u_\nu(x)\big).$$

Unsere weitere Aufgabe wird dann sein aus dem für $u_{\nu+1}(x)$ erhaltenen Ausdrucke eine Abschätzungsformel für wachsende ν herzuleiten und mit deren Hilfe zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen der absolute Wert von $u_\nu(x)$ für wachsende ν unter einer endlichen Größe bleibt. Es wird dann keine Schwierigkeit bieten nachzuweisen, daß der Ausdruck $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)$ ein Integral unserer vorgelegten Differenzengleichung (1) vorstellt, und wir werden nur

noch nötig haben zu zeigen, daß dieses Integral durch eine Reihe S_{ij}, die mit dem gewählten q_{ij} gleiche Indices hat, asymptotisch dargestellt wird.

§ 5.

Gehen wir zur Durchführung des soeben angegebenen Verfahrens über und wählen aus den Zahlen 1, 2, . . . σ eine bestimmte Zahl $\varkappa$ und aus 1, 2, . . . $\mathfrak{e}_\varkappa$ die Zahl λ aus, so ist dadurch aus (32a) eine gewisse Reihe $S_{\varkappa\lambda}$ festgelegt. Wir schreiben dann analog mit (33) und (33a)

$$\varphi_{\varkappa\lambda} \equiv u_0(x) \equiv \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa} a_{\varkappa\lambda}{}^x \exp\left(\beta_{\varkappa\lambda}{}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + {}_i\beta_{\varkappa\lambda}{}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_{\varkappa\lambda}} \cdot \Phi_{\varkappa\lambda}, \tag{44}$$

$$\Phi_{\varkappa\lambda} \equiv 1 + \frac{A_{\varkappa\lambda}}{x^{\frac{1}{c}}} + \ldots + \frac{A_{\varkappa\lambda}^{(n)}}{x^{\frac{n}{c}}}. \tag{44a}$$

Aus (41) geht

$$D_1\left(u_0(x)\right) = 0 \tag{45}$$

hervor, und wenn wir noch die Schreibweise

$$q_{\varkappa\lambda}(x) \equiv F_0(x) \tag{46}$$

anwenden, so erhalten wir auf Grund der Gleichung (41a) für $D_2\left(u_0(x)\right)$ den Ausdruck

$$D_2\left(u_0(x)\right) = \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa} a_{\varkappa\lambda}{}^x \exp\left(\beta_{\varkappa\lambda}{}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + {}_i\beta_{\varkappa\lambda}{}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_{\varkappa\lambda} + (m-e_\varkappa) q_\varkappa + k_{e_\varkappa} - (n+c+1) c} F_0(x). \tag{47}$$

Wir setzen nun allgemein

$$D_2\left(u_\nu(x)\right) = \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa} a_{\varkappa\lambda}{}^x \exp\left(\beta_{\varkappa\lambda}{}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{\varkappa\lambda}{}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_{\varkappa\lambda} + (m-e_\varkappa) q_\varkappa + k_{e_\varkappa} - (n+c+1)/c} F_\nu(x) \tag{47a}$$

und werden für diese neue Funktion $F_\nu(x)$ eine Abschätzungsformel für positiv wachsende ν und x aufstellen müssen, gehen

jedoch zunächst in unserem Hauptverfahren weiter und schreiben die die neue Funktion $u_{\nu+1}(x)$ definierende Differenzengleichung (43c)

$$D_1\left(u_{\nu+1}(x)\right)=D_2\left(u_\nu(x)\right)$$

mit Rücksicht auf (39a) in der ausführlichen Form

$$(48)\quad \begin{aligned} u_{\nu+1}(x+m)+x^{q_1}p_1\,u_{\nu+1}(x+m-1)+x^{2q_1}p_2\,u_{\nu+1}(x+m-2)+\ldots \\ +x^{km}p_m\,u_{\nu+1}(x)=D_2\left(u_\nu(x)\right). \end{aligned}$$

Denken wir uns auf der rechten Seite den in (47a) angegebenen Ausdruck substituiert, so ist (48) eine inhomogene lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung, deren Integral uns $u_{\nu+1}(x)$ darstellt.

Da uns die Integrale der homogenen Differenzengleichung

$$D_1\left(u_{\nu+1}(x)\right)=0$$

bekannt sind, nämlich $\varphi_{11}(x),\ \varphi_{12}(x),\ \ldots\ \varphi_{\sigma\varsigma}(x)$, so wenden wir zur Auflösung der Gleichung (48) die Lagrange'sche Methode der Variation der Konstanten an und setzen

$$(49)\quad u_{\nu+1}(x)=\varphi_{11}(x)\,\psi_{11}(x)+\varphi_{12}(x)\,\psi_{12}(x)+\ldots+\varphi_{\sigma\varsigma}(x)\,\psi_{\sigma\varsigma}(x),$$

wobei wir die m Funktionen $\psi_{11},\ \psi_{12},\ \ldots\ \psi_{\sigma\varsigma}$ den m Bedingungen

$$(49\text{a})\quad \begin{aligned} &\varphi_{11}(x+1)\,\Delta\psi_{11}(x)+\varphi_{11}(x+1)\,\Delta\psi_{12}(x)+\ldots+\varphi_{\sigma\varsigma}(x+1)\,\Delta\psi_{\sigma\varsigma}(x)=0,\\ &\varphi_{11}(x+2)\,\Delta\psi_{11}(x)+\varphi_{12}(x+2)\,\Delta\psi_{12}(x)+\ldots+\varphi_{\sigma\varsigma}(x+2)\,\Delta\psi_{\sigma\varsigma}(x)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_{11}(x+m-1)\,\Delta\psi_{11}(x)+\varphi_{12}(x+m-1)\,\Delta\psi_{12}(x)+\ldots+\varphi_{\sigma\varsigma}(x+m-1)\,\Delta\psi_{\sigma\varsigma}(x)=0,\\ &\varphi_{11}(x+m)\,\Delta\psi_{11}(x)+\varphi_{12}(x+m)\,\Delta\psi_{12}(x)+\ldots+\varphi_{\sigma\varsigma}(x+m)\,\Delta\psi_{\sigma\varsigma}(x)\\ &\qquad=D_2\left(u_\nu(x)\right) \end{aligned}$$

unterwerfen. Aus diesen m Gleichungen finden wir

$$\Delta\psi_{ij}=D_2\left(u_\nu(x)\right)\cdot\frac{\Delta_{ij}(x+1)}{\Delta(x+1)}\qquad (i=1,2,\ldots\sigma;\ j=1,2,\ldots \mathfrak{e}_i)$$

und folglich

$$(50)\quad \psi_{ij}=\sum_{\xi_{ij}}^{x}D_2\left(u_\nu(x)\right)\cdot\frac{\Delta_{ij}(x+1)}{\Delta(x+1)}\qquad (i=1,2,\ldots\sigma;\ j=1,2,\ldots \mathfrak{e}_i),$$

wobei wir die Summationsgrenzen ξ_{ij} noch geeignet wählen dürfen und die Δ und Δ_{ij} die im vorigen Paragraphen angegebene Bedeutung haben. Kehren wir jetzt zu (49) zurück, so haben wir

$$(51)\quad u_{\nu+1}(x)=\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{\mathfrak{e}_i}\varphi_{ij}(x)\sum_{\xi_{ij}}^{x}D_2\left(u_\nu(x)\right)\cdot\frac{\Delta_{ij}(x+1)}{\Delta(x+1)}.$$

Um die rechte Seite ausführlich zu schreiben beachten wir, daß

$$(\Gamma(x+2))^{-q_i} = (x+1)^{-q_i}(\Gamma(x+1))^{-q_i} = x^{-q_i}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-q_i}(\Gamma(x+1))^{-q_i} \qquad (i=1, 2, \ldots \sigma)$$

ist, und erhalten aus (42)

$$\frac{\Delta_{ij}(x+1)}{\Delta(x+1)} = (\Gamma(x+1))^{-q_i}\alpha_{ij}^{-x}\exp\left(-\beta_{ij}'(x+1)^{\frac{c-1}{c}} - \ldots\right.$$

(51b)
$$\left. -\beta_{ij}^{(c-1)}(x+1)^{\frac{1}{c}}\right) x^{-\varrho_{ij}-d_i-q_i}\alpha_{ij}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\varrho_{ij}-d_i-q_i} H_{ij}(x+1)$$
$$(i=1, 2, \ldots \sigma;\ j=1, 2, \ldots e_i).$$

Weil aber

$$\exp\left(-\beta_{ij}'(x+1)^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{ij}^{(c-1)}(x+1)^{\frac{1}{c}}\right)$$
$$= \exp\left(-\beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right)\cdot R_{ij}(x)$$

ist, wobei

$$R_{ij}(x) = \exp\left[-\beta_{ij}'\left((x+1)^{\frac{c-1}{c}} - x^{\frac{c-1}{c}}\right) - \ldots - \beta_{ij}^{(c-1)}\left((x+1)^{\frac{1}{c}} - x^{\frac{1}{c}}\right)\right]$$

nach Gleichung (24) eine Potenzreihe von $x^{-\frac{1}{c}}$ bedeutet, so nimmt (51b) die Form

(51c)
$$\frac{\Delta_{ij}(x+1)}{\Delta(x+1)} = (\Gamma(x+1))^{-q_i}\alpha_{ij}^{-x}\exp\left(-\beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right)$$
$$\cdot x^{-\varrho_{ij}-d_i-q_i}\mathfrak{p}_{ij}(x) \qquad (i=1, 2, \ldots \sigma;\ j=1, 2, \ldots e_i)$$

an, wobei die $\mathfrak{p}_{ij}(x)$ Potenzreihen von $x^{-\frac{1}{c}}$ sind. Wegen (33), (47a) und (51c) finden wir aus (51)

$$(\Gamma(x+1))^{-q_\varkappa}\alpha_{\varkappa\lambda}^{-x}\exp\left(-\beta_{\varkappa\lambda}' x^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{\varkappa\lambda}^{(c)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{-\varrho_{\varkappa\lambda}} u_{\nu+1}(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{e_i}(\Gamma(x+1))^{q_i-q_\varkappa}\left(\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{\varkappa\lambda}}\right)^x \exp\left(\beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right.$$

(52)
$$\left. -\beta_{\varkappa\lambda}' x^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_{ij}-\varrho_{\varkappa\lambda}}\Phi_{ij}(x)\sum_{\xi_{ij}}^{x}(\Gamma(x+1))^{-(q_i-q_\varkappa)}$$
$$\left(\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{\varkappa\lambda}}\right)^{-x}\left[\exp\left(\beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}} - \beta_{\varkappa\lambda}' x^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right)\right]^{-1}$$
$$\cdot x^{-(\varrho_{ij}-\varrho_{\varkappa\lambda})} x^{(m-e_\varkappa)q_\varkappa + k_{e_\varkappa} - d_i - q_i - (n+e+1)/c}$$
$$\mathfrak{p}_{ij}(x) F_\nu(x)$$

und haben hiermit eine Rekursionsformel für $u_{\nu+1}(x)$ gefunden, die aber auf $F_\nu(x)$ zurückgeht und daher die Ableitung einer Rekursionsformel für diese Funktion nötig macht.

Gemäß der Definitionsgleichung (40a) ist zunächst

$$
(53)\qquad \begin{aligned} D_2\left((u_{\nu+1}(x)\right) \equiv x^{q_1}(p_1 - x^{k_1-q_1}P_1)\,u_{\nu+1}(x+m-1) \\ + x^{2q_1}(p_2 - x^{k_2-2q_1}P_2)\,u_{\nu+1}(x+m-2) + \ldots \\ + x^{k_m}(p_m - P_m)\,u_{\nu+1}(x)\,. \end{aligned}
$$

Dann folgt aber aus (49) unter Berücksichtigung der $m-1$ ersten Bedingungsgleichungen (49a)

$$
(53a)\qquad \begin{aligned} u_{\nu+1}(x) &= \varphi_{11}(x)\,\psi_{11}(x) + \varphi_{12}(x)\,\psi_{12}(x) + \ldots + \varphi_{\sigma\varsigma}(x)\,\psi_{\sigma\varsigma}(x) \\ u_{\nu+1}(x+1) &= \varphi_{11}(x+1)\,\psi_{11}(x) + \varphi_{12}(x+1)\,\psi_{12}(x) + \ldots + \varphi_{\sigma\varsigma}(x+1)\,\psi_{\sigma\varsigma}(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{\nu+1}(x+m-1) &= \varphi_{11}(x+m-1)\,\psi_{11}(x) + \varphi_{12}(x+m-1)\,\psi_{12}(x) + \ldots + \varphi_{\sigma\varsigma}(x+m-1)\,\psi_{\sigma\varsigma}(x)\,, \end{aligned}
$$

und wenn wir diese Werte in (53) einsetzen, so geht diese Gleichung in

$$
(53b)\qquad D_2\left(u_{\nu+1}(x)\right) = D_2(\varphi_{11})\,\psi_{11}(x) + D_2(\varphi_{12})\,\psi_{12}(x) + \ldots + D_2(\varphi_{\sigma\varsigma})\,\psi_{\sigma\varsigma}(x)
$$

oder wegen (50) in

$$
(53c)\qquad \begin{aligned} D_2\left(u_{\nu+1}(x)\right) = D_2(\varphi_{11}) \sum_{\xi_{11}}^{x} D_2\left(u_\nu(x)\right) \cdot \frac{\Delta_{11}(x+1)}{\Delta(x+1)} + D_2(\varphi_{12}) \\ \cdot \sum_{\xi_{12}}^{x} D_2\left(u_\nu(x)\right) \cdot \frac{\Delta_{12}(x+1)}{\Delta(x+1)} + \ldots + D_2(\varphi_{\sigma\varsigma}) \sum_{\xi_{\sigma\varsigma}}^{x} D_2\left(u_\nu(x)\right) \cdot \frac{\Delta_{\sigma\varsigma}(x+1)}{\Delta(x+1)} \end{aligned}
$$

über. Setzen wir nun für die linke Seite dieser Gleichung den aus (47a) sich ergebenden Ausdruck

$$
\begin{aligned} D_2\left(u_{\nu+1}(x)\right) = \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa} \alpha_{\varkappa\lambda}^{\;x} \exp\left(\beta_{\varkappa\lambda}'\, x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\, x^{\frac{1}{c}}\right) \\ \cdot\, x^{\varrho_{\varkappa\lambda} + (m-e_\varkappa)q_\varkappa - (n+c+1)/c}\, F_{\nu+1}(x) \end{aligned}
$$

ein, substituieren auf der rechten Seite für $D_2(\varphi_{ij})$, $D_2(u_\nu)$ und $\frac{\Delta_{ij}(x+1)}{\Delta(x+1)}$ die Werte, die aus den Gleichungen (41a), (47a) und (51c) folgen, und dividieren schließlich auf beiden Seiten durch den Faktor von $F_{\nu+1}(x)$, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
F_{\nu+1}(x) = {} & \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{e_i} \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i - q_\varkappa} \left(\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{\varkappa\lambda}}\right)^x \exp\left[(\beta_{ij}' - \beta_{\varkappa\lambda}')\, x^{\frac{c-1}{c}} + \dots \right. \\
& \left. + \left(\beta_{ij}^{(c-1)} - \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\right) x^{\frac{1}{c}}\right] x^{\varrho_{ij} - \varrho_{\varkappa\lambda}}\, x^{(m-e_i)q_i + k_{e_i} - (m-e_\varkappa)q_\varkappa - k_{e_\varkappa}}\, \mathfrak{q}_{ij}(x) \\
& \cdot \sum_{\xi_{ij}}^{x} \left(\Gamma(x+1)\right)^{-q_i + q_\varkappa} \left(\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{\varkappa\lambda}}\right)^{-x} \exp\left[-(\beta_{ij}' - \beta_{\varkappa\lambda}')\, x^{\frac{c-1}{c}} - \dots \right. \\
& \left. - \left(\beta_{ij}^{(c-1)} - \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\right) x^{\frac{1}{c}}\right] x^{-(\varrho_{ij} - \varrho_{\varkappa\lambda})}\, x^{(m-e_\varkappa)q_\varkappa + k_{e_\varkappa} - d_i - q_i - (n+c+1)/c}\, \mathfrak{p}_{ij}(x)\, F_\nu(x).
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Weil aber aus Gleichung (10c) folgt, daß

$$(m-e_{i-1})\,q_i + k_{e_{i-1}} = (m-e_i)\,q_i + k_{e_i} \qquad (i=1, 2, \dots \sigma)$$

ist, so muß auf Grund von (42a)

$$d_i = (m-e_i)\,q_i + k_{e_i} - q_i \qquad (i=1, 2, \dots \sigma)$$

sein und es ist

$$(m-e_\varkappa)\,q_\varkappa + k_{e_\varkappa} - d_i - q_i = (m-e_\varkappa)\,q_\varkappa + k_{e_\varkappa} - (m-e_i)\,q_i - k_{e_i} \qquad (i=1, 2, \dots \sigma).$$

Schreiben wir also

(54a) $$\delta_i \equiv (m-e_i)\,q_i + k_{e_i} \qquad (i=1, 2, \dots \sigma)$$

und

(54b) $$\mathfrak{d}_i \equiv \delta_i - \delta_\varkappa \qquad (i=1, 2, \dots \sigma),$$

so wird

(54c) $$(m-e_i)\,q_i + k_{e_i} - (m-e_\varkappa)\,q_\varkappa - k_{e_\varkappa} = \mathfrak{d}_i \qquad (i=1, 2, \dots \sigma)$$

und

(54d) $$(m-e_\varkappa)\,q_\varkappa + k_{e_\varkappa} - d_i - q_i = -\mathfrak{d}_i \qquad (i=1, 2, \dots \sigma).$$

Wir denken uns in Gleichung (54) die Exponenten von x mit Hilfe von (54c) und (54d) einfacher geschrieben und haben hiermit die für $F_{\nu+1}(x)$ gesuchte Rekursionsformel gefunden.

§ 6.

Für die weitere Untersuchung unserer beiden Gleichungen (52) und (54) wollen wir folgende Änderung in der Schreibweise eintreten lassen: Wir setzen

$$\left|\frac{a_{ij}}{a_{\varkappa\lambda}}\right| \equiv \mathfrak{a}_{ij},\ \Re(\beta_{ij}' - \beta_{\varkappa\lambda}') \equiv \mathfrak{b}_{ij}',\ \ldots\ \Re\left(\beta_{ij}^{(c-1)} - \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\right) \equiv \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)},$$
$$\Re(\varrho_{ij} - \varrho_{\varkappa\lambda}) \equiv \mathfrak{r}_{ij}, \tag{55}$$

wobei das Symbol $\Re$ den reellen Teil der als Argument beigesetzten Größe bedeuten soll.

Des ferneren wollen wir zur Umformung von (52) und (54) für die Variable, auf die sich die Summationen $\sum_{\xi_{ij}}^{x}$ beziehen, t statt x schreiben und die Gleichungen (54c) und (54d) anwenden. So erhalten wir aus den beiden Rekursionsformeln (52) und (54)

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\Gamma(x+1)\right)^{-q_\varkappa}\mathfrak{a}_{\varkappa\lambda}{}^{-x}\exp\left(-\beta_{\varkappa\lambda}'\,x^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\,x^{\frac{1}{c}}\right)x^{-\varrho_{\varkappa\lambda}}u_{\nu+1}(x)\right| \\
&\leqq \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{e_i}\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i-q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{x}\exp\left(\mathfrak{b}_{ij}'\,x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}x^{\frac{1}{c}}\right)x^{\mathfrak{r}_{ij}} \\
&\cdot\left|\Phi_{ij}(x)\right| \cdot \sum_{\xi_{ij}}^{\sigma}\left(\Gamma(t+1)\right)^{-q_i+q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{-t}\exp\left(-\mathfrak{b}_{ij}'\,t^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}\,t^{\frac{1}{c}}\right) \\
&\cdot t^{-\mathfrak{r}_{ij}-\mathfrak{b}_i-(n+c+1)c}\left|\mathfrak{p}_{ij}(t)\right| \cdot \left|F_\nu(t)\right|
\end{aligned} \tag{56}$$

und

$$\begin{aligned}
&\left|F_{\nu+1}(x)\right| \leqq \sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{e_i}\left(\Gamma(x+1)\right)^{-q_i-q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{x}\exp\left(\mathfrak{b}_{ij}'\,x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}x^{\frac{1}{c}}\right) \\
&\cdot x^{\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{b}_i}\left|\mathfrak{q}_{ij}(x)\right| \cdot \sum_{\xi_{ij}}^{x}\left(\Gamma(t+1)\right)^{-q_i+q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{-t}\exp\left(-\mathfrak{b}_{ij}t^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}\,t^{\frac{1}{c}}\right) \\
&\cdot t^{-\mathfrak{r}_{ij}-\mathfrak{b}_i-(n+c+1)/c}\left|\mathfrak{p}_{ij}(t)\right| \cdot \left|F_\nu(t)\right|.
\end{aligned} \tag{57}$$

Zur weiteren Vereinfachung dieser beiden Abschätzungsformeln wird es zunächst nötig sein das Verhalten der Funktion

$$\left(\Gamma(x+1)\right)^{q}\mathfrak{a}^{x}\exp\left(\mathfrak{b}'\,x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)}\,x^{\frac{1}{c}}\right)x^{\mathfrak{r}}$$

für ganzzahlig wachsende x näher zu untersuchen. Ist der Exponent

der Gammafunktion von Null verschieden, so wird es immer möglich sein ein x_0 anzugeben, daß für alle $x \geqq x_0$ die vorgelegte Funktion monoton wächst oder abnimmt, je nachdem der Exponent der Gammafunktion positiv oder negativ ist, einerlei was die übrigen Konstanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}', \ldots \mathfrak{b}^{(c-1)}$, $\mathfrak{r}$ für Werte haben mögen. Es ist also

$$(58)\quad \begin{aligned}&\left(\Gamma(x+1)\right)^q \mathfrak{a}^x \exp\left(\mathfrak{b}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\mathfrak{r}} \leqq \left(\Gamma(t+1)\right)^q \mathfrak{a}^t \\ &\cdot \exp\left(\mathfrak{b}' t^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} t^{\frac{1}{c}}\right) t^{\mathfrak{r}} \text{ für } t \geqq x \geqq x_0,\ q > 0\end{aligned}$$

und

$$(58a)\quad \begin{aligned}&\left(\Gamma(x+1)\right)^q \mathfrak{a}^x \exp\left(\mathfrak{b}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\mathfrak{r}} \geqq \left(\Gamma(t+1)\right)^q \mathfrak{a}^t \\ &\cdot \exp\left(\mathfrak{b}' t^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} t^{\frac{1}{c}}\right) t^{\mathfrak{r}} \text{ für } t \geqq x \geqq x_0,\ q < 0.\end{aligned}$$

Ist nun $q=0$ und wir nehmen $\mathfrak{a}>1$, so können wir mit Benützung der Gleichung (24) finden, daß

$$\frac{\mathfrak{a}^{x+1} \exp\left(\mathfrak{b}'(x+1)^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)}(x+1)^{\frac{1}{c}}\right)(x+1)^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{a}^x \exp\left(\mathfrak{b}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\mathfrak{r}}} = \mathfrak{a}\left(1 + \frac{\frac{c-1}{c}\mathfrak{b}'}{x^{\frac{1}{c}}} + \ldots\right)$$

$$\ldots \left(1 + \frac{\frac{1}{c}\mathfrak{b}^{(c-1)}}{x^{\frac{c-1}{c}}} + \ldots\right)\left(1 + \frac{\mathfrak{r}}{x} + \ldots\right) = \mathfrak{a}(1+\delta) \qquad \lim_{x=\infty} \delta = 0$$

$$> 1$$

und folglich

$$(59)\quad \mathfrak{a}^x \exp\left(\mathfrak{b}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\mathfrak{r}} \leqq \mathfrak{a}^t \exp\left(\mathfrak{b}' t^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} t^{\frac{1}{c}}\right) t^{\mathfrak{r}}$$

für $t \geqq x \geqq x_0$, $\mathfrak{a}>1$, $t-x$ ganzzahlig.

Wenden wir uns zu dem Falle $\mathfrak{a}=1$, nehmen aber $\mathfrak{b}'>0$, so entwickeln wir

$$\frac{\exp\left(\mathfrak{b}'(x+1)^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)}(x+1)^{\frac{1}{c}}\right)(x+1)^{\mathfrak{r}}}{\exp\left(\mathfrak{b}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\mathfrak{r}}} = \left(1 + \frac{\frac{c-1}{c}\mathfrak{b}'}{x^{\frac{1}{c}}} + \ldots\right)$$

$$\cdot \left(1 + \frac{\frac{c-2}{c}\mathfrak{b}''}{x^{\frac{2}{c}}} + \frac{\frac{c-3}{c}\mathfrak{b}'''}{x^{\frac{3}{c}}} + \ldots\right).$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite ist wegen $\mathfrak{b}' > 0$ sicherlich größer als 1. Aber auch die ganze rechte Seite bleibt größer als Eins für alle $x \geqq x_0$, weil der Inhalt der zweiten Klammer rascher gegen die Einheit konvergiert als der Inhalt der ersten Klammer, d. h also

$$\exp\left(\mathfrak{b}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\mathfrak{r}}$$

ist für $\mathfrak{b}' > 0$ und ganzzahlig wachsende x eine von einer gewissen Stelle x_0 ab stets zunehmende Funktion. Da die entsprechenden Schlüsse auch für die Fälle $\mathfrak{b}' = 0$, $\mathfrak{b}'' > 0$ oder $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}'' = 0$, $\mathfrak{b}''' > 0$ usw. Gültigkeit haben, so dürfen wir sagen: die Relation (59) gilt außer für $\mathfrak{a} > 1$ auch für $\mathfrak{a} = 1$, wenn das im Argument der Exponentialfunktion vorkommende $\mathfrak{b}^{(i)}$ mit dem kleinsten Index i positiv ist, und sie gilt selbstverständlich auch, wenn im extremsten Falle $\mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}'' = \ldots = \mathfrak{b}^{(c-1)} = 0$ und $\mathfrak{r} > 0$ ist.

Umgekehrt ist

59a) $$\mathfrak{a}^x \exp\left(\mathfrak{b}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\mathfrak{r}} \geqq \mathfrak{a}^t \exp\left(\mathfrak{b}' t^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}^{(c-1)} t^{\frac{1}{c}}\right) t^{\mathfrak{r}}$$

für $t \geqq x \geqq x_0$, falls $\mathfrak{a} < 1$ oder $\mathfrak{a} = 1$ und $\mathfrak{b}^{(i)}$ mit dem kleinsten Index i negativ oder endlich $\mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}'' = \ldots = \mathfrak{b}^{(c-1)} = 0$ und $\mathfrak{r} < 0$ ist.

Der Wert x_0, für welchen die Ungleichungen (58) bis (59a) richtig sind, hängt von den Konstanten q, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}'$, $\ldots$ $\mathfrak{b}^{(c-1)}$, $\mathfrak{r}$ ab. Wir werden zwar diese Ungleichungen später für verschiedene Werte der Konstanten benützen, aber immer nur für eine endliche Anzahl. Daher läßt sich x_0 so wählen, daß die Formeln (58) bis (59a) für jeden benützten Wert der Konstanten in Geltung bleiben.

§ 7.

Kehren wir zur Abschätzungsformel (57) zurück, so lassen sich die m Glieder, die auf der rechten Seite durch ein doppeltes Summenzeichen zusammengefaßt sind, in drei große Gruppen zerlegen. Bei den Gliedern der ersten Gruppe ist $q_i - q_\varkappa < 0$, also $i = 1, 2, \ldots \varkappa - 1$; bei denen der zweiten ist $q_i - q_\varkappa = 0$, also $i = \varkappa$; und bei denen der dritten ist $q_i - q_\varkappa < 0$, also $i = \varkappa + 1$,

$\varkappa+2, \ldots \sigma$. Die Anzahl der Glieder der ersten Gruppe ist $e_{\varkappa-1}$, die der zweiten $e_\varkappa - e_{\varkappa-1} = \mathfrak{e}_\varkappa$, wofür wir der Kürze halber auch $\mathfrak{e}$ schreiben wollen, und zur letzten Gruppe gehören $m - e_\varkappa$ Glieder. Beachten wir, daß wegen (54b)

$$\mathfrak{b}_\varkappa = 0$$

ist, so erhalten wir aus (57)

$$\begin{aligned}
|F_{\nu+1}(x)| \leqq & \sum_{i=1}^{\varkappa-1} \sum_{j=1}^{\mathfrak{e}_i} (\Gamma(x+1))^{q_i - q_\varkappa} \mathfrak{a}_{ij} x^{\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{b}_i} \exp\left(\mathfrak{b}_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \\
& \cdot |\mathfrak{q}_{ij}(x)| \cdot \sum_{\xi_{ij}}^{x} (\Gamma(t+1))^{-q_i+q_\varkappa} \mathfrak{a}_{ij}^{-t} \exp\left(-\mathfrak{b}_{ij}' t^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)} t^{\frac{1}{c}}\right) \\
& \cdot t^{-\mathfrak{r}_{ij}-\mathfrak{b}_i} t^{-\frac{n+c+1}{c}} |\mathfrak{p}_{ij}(t)| \cdot |F_\nu(t)| + \sum_{j=1}^{\mathfrak{e}} \mathfrak{a}_{\varkappa j} x^{\mathfrak{r}_{\varkappa j}} \exp\left(\mathfrak{b}_{\varkappa j}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}_{\varkappa j}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \\
(60) \quad & \cdot x^{\mathfrak{r}_{\varkappa j}} |\mathfrak{q}_{\varkappa j}(x)| \cdot \sum_{\xi_{\varkappa j}}^{x} \mathfrak{a}_{\varkappa j}^{-t} \exp\left(-\mathfrak{b}_{\varkappa j}' t^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \mathfrak{b}_{\varkappa j}^{(c-1)} t^{\frac{1}{c}}\right) t^{-\mathfrak{r}_{\varkappa j}} t^{-\frac{n+c+1}{c}} \\
& \cdot |\mathfrak{p}_{\varkappa j}(t)| \cdot |F_\nu(t)| + \sum_{i=\varkappa+1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{\mathfrak{e}_i} (\Gamma(x+1))^{q_i - q_\varkappa} \mathfrak{a}_{ij} x^{\mathfrak{r}_{ij}} \exp\left(\mathfrak{b}_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots \right. \\
& \left. + \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{b}_i} |\mathfrak{q}_{ij}(x)| \cdot \sum_{\xi_{ij}}^{x} (\Gamma(t+1))^{-q_i+q_\varkappa} \mathfrak{a}_{ij}^{-t} \exp\left(-\mathfrak{b}_{ij}' t^{\frac{c-1}{c}} - \ldots \right. \\
& \left. \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)} t^{\frac{1}{c}}\right) t^{-\mathfrak{r}_{ij}-\mathfrak{b}_i} t^{-\frac{n+c+1}{c}} |\mathfrak{p}_{ij}(t)| \cdot |F_\nu(t)|.
\end{aligned}$$

Was die von Null verschiedenen Wurzeln $\alpha_{\varkappa 1}, \alpha_{\varkappa 2}, \ldots \alpha_{\varkappa\mathfrak{e}}$ der zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite gehörenden charakteristischen Gleichung $E_\varkappa = 0$ betrifft, so bleiben wir bei der früheren Annahme, daß sie sämtlich von einander verschieden sein sollen, wir lassen aber zu, daß die absoluten Beträge einiger oder aller $\alpha_{\varkappa i}$ einander gleich sein dürfen. Doch knüpfen wir hieran die Bedingung: Sind die absoluten Beträge zweier Wurzeln, etwa $|\alpha_{\varkappa\lambda}|$ und $|\alpha_{\varkappa\mu}|$, einander gleich, ist also nach Definition (55) $\mathfrak{a}_{\varkappa\mu} = 1$, so dürfen nicht alle Größen

$$\mathfrak{b}_{\varkappa\mu}' \equiv \Re({}_i\beta_{\varkappa\mu}' - {}_i\beta_{\varkappa\lambda}'), \mathfrak{b}_{\varkappa\mu}'' \equiv \Re({}_i\beta_{\varkappa\mu}'' - {}_i\beta_{\varkappa\lambda}''), \ldots \mathfrak{b}_{\varkappa\mu}^{(c-1)} \equiv \Re({}_i\beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)} - {}_i\beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)})$$

zugleich Null sein, sondern die Ungleichung

(60a) $$\mathfrak{b}_{\varkappa\mu}^{(i)} \geqq 0$$

muß mindestens für einen Index i erfüllt sein.*)

Nach Definition (55) ist

$$\mathfrak{a}_{\varkappa\lambda}=1,\ \mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}'=\mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}''=\ldots=\mathfrak{b}_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}=\mathfrak{r}_{\varkappa\lambda}=0$$

und wir denken uns die $\alpha_{\varkappa j}$ $(j=1, 2, \ldots \mathfrak{e})$ so geordnet, daß

(60b) $$|\alpha_{\varkappa 1}|\geqq|\alpha_{\varkappa 2}|\geqq\ldots\geqq|\alpha_{\varkappa,\lambda-1}|\geqq|\alpha_{\varkappa\lambda}|\geqq|\alpha_{\varkappa,\lambda+1}|\geqq\ldots\geqq|\alpha_{\varkappa\mathfrak{e}}|$$

und daher

$$\mathfrak{a}_{\varkappa 1}\geqq\mathfrak{a}_{\varkappa 2}\geqq\ldots\geqq\mathfrak{a}_{\varkappa,\lambda-1}\geqq 1\geqq\mathfrak{a}_{\varkappa,\lambda+1}\geqq\ldots\geqq\mathfrak{a}_{\varkappa\mathfrak{e}}$$

ist. Sind dabei die absoluten Beträge einiger $\alpha_{\varkappa j}$ gleich dem absoluten Betrage von $\alpha_{\varkappa\lambda}$, so sollen zu $j=1, 2, \ldots \lambda-1$ diejenigen $\alpha_{\varkappa i}$ gezählt werden, für die das von Null verschiedene $\mathfrak{b}_{\varkappa j}^{(i)}$ mit dem kleinsten Index i positiv ist, während zu $j=\lambda+1, \lambda+2, \ldots \mathfrak{e}$ diejenigen $\alpha_{\varkappa j}$ gehören, für die das von Null verschiedene $\mathfrak{b}_{\varkappa j}^{(i)}$ mit dem kleinsten Index i negativ ist.

Ist diese Anordnung der $\alpha_{\varkappa 1}, \alpha_{\varkappa 2}, \ldots \alpha_{\varkappa\mathfrak{e}}$ durchgeführt, so können wir das mittlere Glied auf der rechten Seite von (60), nämlich die $\sum_{j=1}^{\mathfrak{e}}$, wieder in drei Teile zerlegen: zuerst kommen die Glieder, für die $j=1, 2, \ldots \lambda-1$ ist, dann folgt alleinstehend

---

*) Wir möchten ausdrücklich darauf hinweisen, daß unsere Annahme gleicher absoluter Beträge der Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit der daran geschlossenen einschränkenden Bedingung bezüglich der $\mathfrak{b}_{\varkappa l}^{(i)}$ nicht gleichwertig ist mit den Voraussetzungen, die Herr Horn in seiner eingangs zitierten Arbeit macht. Wenn man nämlich die Gleichung (VI) unserer Einleitung als Spezialfall unserer Gleichung (1) betrachtet, so müssen die absoluten Beträge der Wurzeln von (VIa) als von einander verschieden betrachtet werden, weil für (VI) alle $\gamma_{ij}^{(k)}$ und $\mathfrak{b}_{ij}^{(k)}$ Null sind, während Herr Horn diese absoluten Beträge als gleich zuläßt. Der Grund, warum wir das Theorem des Herrn Horn nicht in seiner vollen Allgemeinheit in unsere Untersuchungen herübergenommen haben, ist darin zu suchen, daß in der erwähnten Abhandlung des Herrn Horn (S. 170 Zeile 8 und S. 173 Zeile 3) in der dort angegebenen Formel $+\bar{n}+1$ für $-\bar{n}-1$ im Exponenten von x gesetzt werden muß, wodurch die auf diese Formel bezüglich des Endlichbleibens einer Größe $\bar{\gamma}_\lambda$ gegründeten Schlüsse nicht mehr bindend bleiben. Dagegen ist das Versehen in den besagten Formeln ohne Einfluß auf die weiteren Schlüsse, sobald die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (VIa) mit lauter verschiedenen absoluten Beträgen vorausgesetzt werden.

das λ^{te} Glied und dann folgen die Glieder, für die $j = \lambda + 1$, $\lambda + 2, \ldots \mathfrak{e}$ ist.

Wir wollen jedoch zugleich mit dieser Änderung der rechten Seite von (60) noch zwei weitere vornehmen. Erstens wollen wir die noch zu unserer Verfügung stehenden Summationsgrenzen ξ_{ij} in der Weise festsetzen,

daß $\xi_{11} = \xi_{12} = \ldots = \xi_{\varkappa 1} = \xi_{\varkappa 2} = \ldots = \xi_{\varkappa\lambda} = \infty$
und $\xi_{\varkappa, \lambda+1} = \xi_{\varkappa, \lambda+2} = \ldots = \xi_{\sigma, \mathfrak{e}_\sigma} = x_0$

sein sollen. Dabei soll $x \geqq x_0$ sein und wir werden sofort über die Wahl von x_0 nähere Angaben machen. Nebenbei sei gesagt, daß wir auf den durch etwaige Vertauschung der oberen Summationsgrenze mit der unteren herbeigeführten Vorzeichenwechsel keine Rücksicht zu nehmen brauchen, weil unsere Formel (60) nur auf den absoluten Wert von $F_{\nu+1}(x)$ sich beziehen soll.

Zweitens wollen wir die rechte Seite von (60) in geeigneter Weise vergrößern, was sich durch passende Fixierung der Zahl x_0 erreichen läßt. Wir nehmen x_0 so groß, daß außer den Ungleichungen (58), (58a), (59), (59a) auch

$$(61) \qquad |\Phi_{ij}(x)| \leqq M, |\mathfrak{p}_{ij}(x)| \leqq M, |\mathfrak{q}_{ij}(x)| \leqq M \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma;\ j = 1, 2, \ldots \mathfrak{e}_i)$$

für $x \geqq x_0$ und

$$(62) \qquad F_\nu(x) \leqq M \left(\frac{G}{x_0^{\frac{n+1}{e}}} \right)^\nu$$

für $x \geqq x_0$, wo M und G nicht von x abhängen, erfüllt sind und wir auf der rechten Seite von (60) die Substitutionen (61) und (62) vornehmen können.

Dabei bemerken wir zu (62), daß der Nachweis dieser Ungleichung für alle Werte von ν das nächste Ziel unserer Untersuchungen bildet. Wir haben aber diese Formel nach (46) und (61) schon für den Wert $\nu = 0$ bewiesen. Nehmen wir also an, sie sei für ν bewiesen, so haben wir zu zeigen, daß sie mit Hilfe von (60) auch für $\nu + 1$ gilt.

Führen wir alle diese Umgestaltungen mit der rechten Seite von (60) aus, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|F_{n+1}(x)| \leq & M^3 \left(\frac{G}{x_0^{\frac{n+1}{c}}}\right)^r \Bigg\{ \sum_{i=1}^{\varkappa-1} \sum_{j=1}^{e_i} + \sum_{i=\varkappa, j=1}^{i=\lambda-1, j=\lambda-1} \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i-q_\varkappa} \mathfrak{a}_{ij}{}^x \\
& \cdot \exp\left(\mathfrak{b}_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{r_{ij}+\mathfrak{b}_i} \cdot \sum_{x}^{\infty} \left(\Gamma(t+1)\right)^{-q_i+q_\varkappa} \mathfrak{a}_{ij}{}^{-t} \\
& \cdot \exp\left(-\mathfrak{b}_{ij}' t^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)} t^{\frac{1}{c}}\right) t^{-r_{ij}-\mathfrak{b}_i} t^{-\frac{n+c+1}{c}} + \sum_{x}^{\infty} t^{-\frac{n+c+1}{c}} \\
(63) \quad & + \sum_{i=\varkappa, j=\lambda+1}^{j=e} + \sum_{i=\varkappa+1}^{\sigma} \sum_{j=1}^{e_i} \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i-q_\varkappa} \mathfrak{a}_{ij}{}^x \exp\left(\mathfrak{b}_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) \\
& \cdot x^{r_{ij}+\mathfrak{b}_i} \cdot \sum_{x_0}^{x} \left(\Gamma(t+1)\right)^{-q_i+q_\varkappa} \mathfrak{a}_{ij}{}^{-t} \exp\left(-\mathfrak{b}_{ij}' t^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)} t^{\frac{1}{c}}\right) \\
& \cdot t^{-r_{ij}-\mathfrak{b}_i} t^{-\frac{n+c+1}{c}} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Der Inhalt der großen Klammer auf der rechten Seite zerfällt in drei Gruppen, deren mittlere ein einziges Glied ist, eine einfache Summation darstellend. Für diese können wir eine Abschätzung folgendermaßen gewinnen:*)

Setzen wir zur Abschätzung $\frac{n+c+1}{c} = \lambda$, so ist $\lambda > 1$ und es handelt sich um eine Abschätzung für die Reihe

$$\sum_{x}^{\infty} t^{-\lambda} \equiv \frac{1}{x^\lambda} + \frac{1}{(x+1)^\lambda} + \frac{1}{(x+2)^\lambda} + \ldots$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{x^\lambda} < \int_{x-1}^{x} \frac{dv}{v^\lambda},$$

weil im Intervall $x-1$ bis x stets $\frac{1}{v^\lambda} > \frac{1}{x^\lambda}$. Daher ist auch

$$\frac{1}{x^\lambda} + \frac{1}{(x+1)^\lambda} + \frac{1}{(x+2)^\lambda} + \ldots < \int_{x-1}^{x} \frac{dv}{v^\lambda} + \int_{x}^{x+1} \frac{dv}{v^\lambda} + \int_{x+1}^{x+2} \frac{dv}{v^\lambda} + \ldots$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist aber $\int_{x-1}^{\infty} \frac{dv}{v^\lambda}$

*) Das angegebene Verfahren verdankt der Verfasser einer brieflichen Mitteilung von Herrn Perron.

und es ist $\int_{x-1}^{\infty} \frac{dv}{v^{\lambda}} = \frac{1}{(\lambda-1)(x-1)^{\lambda-1}}$.

Setzen wir also für λ seinen ursprünglichen Wert wieder ein, so ist

$$\sum_{x}^{\infty} t^{-\frac{n+c+1}{c}} < \frac{c}{(n+1)(x-1)^{\frac{n+1}{c}}}. \tag{64}$$

Hiermit ist aber zugleich der Weg gezeigt, den die Behandlung der ersten Gruppe von Gliedern auf der rechten Seite von (63) zu nehmen hat. Weil in dieser Gruppe alle Glieder vereinigt sind bis einschließlich des $(\lambda-1)^{\text{ten}}$, so ist entweder der Exponent der Gammafunktion $q_i - q_\varkappa$ positiv oder er ist Null und es ist $\mathfrak{a}_{ij} > 1$ oder es ist $\mathfrak{a}_{ij} = 1$ und zugleich das von Null verschiedene $\mathfrak{b}_{ij}^{(k)}$ mit dem niedrigsten Index k positiv. Daher gelten die Ungleichungen (58) und (59) und es ist für $t \geqq x \geqq x_0$

$$\begin{aligned}&\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i-q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{x}\exp\left(\mathfrak{b}_{ij}'x^{\frac{c-1}{c}}+\ldots+\mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}x^{\frac{1}{c}}\right)x^{\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{d}_i}\\ &\cdot\left[\left(\Gamma(t+1)\right)^{q_i-q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{t}\exp\left(\mathfrak{b}_{ij}'t^{\frac{c-1}{c}}+\ldots+\mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}t^{\frac{1}{c}}\right)t^{\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{d}_i}\right]^{-1}\leqq 1.\end{aligned}$$

Weil diese Formel für wachsende t in verstärktem Maße gilt, so machen wir alle Glieder der Reihen $\sum_{x}^{\infty}$ größer, wenn wir jedes derartige Produkt durch seinen Maximalwert 1 ersetzen. Folglich bleibt die Gesamtheit aller Glieder der ersten Gruppe in der großen Klammer der Formel (63) kleiner als

$$(e_{\varkappa-1}+\lambda-1)\sum_{x}^{\infty} t^{-\frac{n+c+1}{c}},$$

da ihre Anzahl gleich $e_{\varkappa-1}+\lambda-1$ ist. Diese Summation hat aber durch (64) ihre Erledigung gefunden und (63) wird zu

$$|F_{\varkappa-1}(x)| < M^3\left(\frac{G}{x_0^{\frac{n+1}{c}}}\right)^{r}\left\{\frac{(e_{\varkappa-1}+\lambda)c}{(n+1)(x-1)^{\frac{n+1}{c}}}+\Omega(x)\right\}, \tag{65}$$

wenn wir mit $\Omega(x)$ die dritte Gruppe in der großen Klammer von (63) bezeichnen.

Bei den $m-e_{\varkappa-1}-\lambda$ Gliedern der dritten Gruppe erstrecken sich die Summationen von x_0 bis x, so daß also $x>t\geqq x_0$ ist und wir die Entwicklung bekommen

$$\sum_{x_0}^{x}\left(\Gamma(t+1)\right)^{-q_i+q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{-t}\exp\left(-\mathfrak{b}_{ij}'\,t^{\frac{c-1}{c}}-\ldots-\mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}\,t^{\frac{1}{c}}\right)t^{-\mathfrak{r}_{ij}-\mathfrak{b}_i}\,t^{-\frac{n+c+1}{c}}$$

$$\leqq\left\{\left(\Gamma(x_0+1)\right)^{q_i-q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{x_0}\exp\left(\mathfrak{b}_{ij}'\,x_0^{\frac{c-1}{c}}+\ldots+\mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}\,x_0^{\frac{1}{c}}\right)x_0^{\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{b}_i+(n+c+1)/c}\right\}^{-1}$$

$$+\left\{\left(\Gamma(x_0+2)\right)^{q_i-q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{x_0+1}\exp\left(\mathfrak{b}_{ij}'\,(x_0+1)^{\frac{c-1}{c}}+\ldots+\mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}\,(x_0+1)^{\frac{1}{c}}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\,(x_0+1)^{\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{b}_i+(n+c+1)/c}\right\}^{-1}+\ldots+\left\{\left(\Gamma(x)\right)^{q_i-q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{x-1}\exp\left(\mathfrak{b}_{ij}'\,(x-1)^{\frac{c-1}{c}}+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}\,(x-1)^{\frac{1}{c}}\right)(x-1)^{\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{b}_i+(n+c+1)/c}\right\}^{-1}.$$

Weil in dieser Gleichung die Indices i und j die Werte $i=\varkappa$; $j=\lambda+1,\lambda+2,\ldots\mathfrak{e}$ und $i=\varkappa+1,\varkappa+2\ldots\sigma$; $j=1,2,\ldots\mathfrak{e}_i$ haben, so sind die Bedingungen für die Gültigkeit der Ungleichungen (58a) und (59a) erfüllt. Es sind also die Inhalte der großen Klammern auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung abnehmende Funktionen, mithin die mit dem Exponenten -1 versehenen Klammern selbst zunehmende Funktionen. Die rechte Seite nimmt einen größeren Wert an, wenn wir allen Klammern, deren Anzahl $x-x_0$ ist, den Inhalt der letzten geben. Daher ist

$$\sum_{x_0}^{x}\left(\Gamma(t+1)\right)^{-q_i+q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{-t}\exp\left(-\mathfrak{b}_{ij}'\,t^{\frac{c-1}{c}}-\ldots-\mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}\,t^{\frac{1}{c}}\right)t^{-\mathfrak{r}_{ij}-\mathfrak{b}_i}\,t^{-\frac{n+c+1}{c}}$$

$$\leqq(x-x_0)\left\{\left(\Gamma(x)\right)^{q_i-q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}{}^{x-1}\exp\left(\mathfrak{b}_{ij}'\,(x-1)^{\frac{c-1}{c}}+\ldots+\mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}\,(x-1)^{\frac{1}{c}}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\,(x-1)^{\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{b}_i+(n+c+1)/c}\right\}^{-1}.$$

Folglich wird die Gesamtheit der Glieder der dritten Gruppe in Formel (63)

$$\Omega(x)<\sum_{i=\varkappa,\,j=\lambda+1}^{j=\mathfrak{e}_\varkappa}+\sum_{i=\varkappa+1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{\mathfrak{e}_i}(x-x_0)\,x^{q_i-q_\varkappa}\mathfrak{a}_{ij}\exp\left[\mathfrak{b}_{ij}'\left(x^{\frac{c-1}{c}}-(x-1)^{\frac{c-1}{c}}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+\,\mathfrak{b}_{ij}^{(c-1)}\left(x^{\frac{1}{c}}-(x-1)^{\frac{1}{c}}\right)\right]\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\mathfrak{r}_{ij}-\mathfrak{b}_i-(n+c+1)/c}x^{-(n+c+1)/c}$$

oder

$$\Omega(x) \leqq (m - e_{\varkappa-1} - \lambda)\, x^{\operatorname{Max}(q_i - q_\varkappa)} \operatorname{Max} \mathfrak{a}_{ij} \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\ldots$$

$$\cdot (1+\varepsilon_{c-1}) \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\operatorname{Min}(-\mathfrak{r}_{ij} - \mathfrak{b}_i - (n+c+1)/c)} x^{-(n+c+1)/c+1},$$

wobei $\lim_{x=\infty} \varepsilon_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots c-1).$

Weil für die hier in Betracht kommenden Werte der Indices i und j $\operatorname{Max}(q_i - q_\varkappa) = 0$ und $\operatorname{Max} \mathfrak{a}_{ij} = 1$ ist, so erhalten wir

$$\Omega(x) \leqq (m - e_{\varkappa-1} - \lambda)(1+\eta)\, x^{-\frac{n+1}{c}} \tag{66}$$

für $x \geqq x_0$, wobei η eine von x nicht abhängige Konstante bedeutet.

Mithin wird (65) zu

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{M^3}{x^{\frac{n+1}{c}}} \left(\frac{G}{x_0^{\frac{n+1}{c}}}\right)^{\nu} \left\{ \frac{(e_{\varkappa-1} + \lambda)\, c}{(n+1)\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{(n+1)/c}} + (m - e_{\varkappa-1} - \lambda)(1+\eta) \right\}.$$

Wir legen M außer (61) nun auch die Bedingung

$$M \geqq \frac{(e_{\varkappa-1} + \lambda)\, c}{(n+1)\left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^{(n+1)/c}} + (m - e_{\varkappa-1} - \lambda)(1+\eta) \tag{67}$$

auf und setzen

$$M^3 = G, \tag{67a}$$

so erhalten wir

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{M\, G^{\nu+1}}{x^{\frac{n+1}{c}} \left(x_0^{\frac{n+1}{c}}\right)^{\nu}} \tag{68}$$

oder

$$|F_{\nu+1}(x)| \leqq M \left(\frac{G}{x_0^{\frac{n+1}{c}}}\right)^{\nu+1} \tag{68a}$$

für $x \geqq x_0$, womit wir die allgemeine Gültigkeit von Formel (62) bewiesen haben.

§ 8.

Um auch eine Abschätzungformel für $u_\nu(x)$ zu erhalten, wird es nicht notwendig sein die gesamten Entwicklungen, die wir im vorigen Paragraphen auf (57) angewendet haben, noch einmal auf (56) anzuwenden, sondern es wird genügen, wenn wir die

Verschiedenheiten der in der Hauptsache analog gebauten Ungleichungen (56) und (57) ins Auge fassen und angeben, welche Modifikationen im Verlauf der in § 7 gegebenen Entwicklungen durch diese Verschiedenheiten hervorgerufen werden. Beachten wir zuerst, daß in (56) $|\Phi_{ij}(x)|$ die Stelle von $|q_{ij}(x)|$ in (57) einnimmt, so zeigt uns die erste der Formeln (61), daß dieser Umstand auf die Berechnungen des vorigen Paragraphen ohne Einfluß bleiben wird.

Der zweite und letzte Unterschied zwischen den beiden in Rede stehenden Gleichungen besteht darin, daß dem Faktor $t^{-\mathfrak{r}_{ij}-\mathfrak{d}_i-(n+c+1)c}$ hinter dem Summationszeichen in (57) als Faktor vor dem Summationszeichen eine Potenz von x mit dem Exponenten $\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{d}_i$, in (56) aber eine Potenz von x entspricht, die nur $\mathfrak{r}_{ij}$ zum Exponenten hat.

Denken wir uns also in (63) auf der linken Seite statt $F_{\nu+1}$ die linke Seite der Ungleichung (56) geschrieben, so bleibt wegen $\mathfrak{d}_\varkappa = 0$ das mittlere Glied in der großen Klammer rechts unverändert, dagegen erfordern die erste und dritte Gruppe kleine Änderungen. Wir wenden uns zunächst der ersten Gruppe zu. Setzen wir hier $x^{\mathfrak{r}_{ij}}$ statt $x^{\mathfrak{r}_{ij}+\mathfrak{d}_i}$ vor dem Summationszeichen, so bleiben unsere Überlegungen, die (63) in (65) übergeführt haben, bestehen, nur haben wir den Wert der Summe

$$\sum_x^\infty t^{-(n+c+1)/c-\mathfrak{d}_i} \qquad (i=1, 2, \ldots \varkappa-1)$$

noch näher zu betrachten. Es soll deshalb untersucht werden, ob es möglich ist über das Vorzeichen der $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots \mathfrak{d}_{\varkappa-1}$ bestimmte Angaben zu machen.

Nach den Definitionen (54a) und (54b) ist $\mathfrak{d}_i \equiv \delta_i - \delta_\varkappa$, wobei $\delta_i \equiv (m-e_i)q_i + k_{e_i}$ ist. Analog mit Gleichung (11) sind

$$Y - k_{e_i} = q_i(X - e_i) \qquad (i=1, 2, \ldots \sigma) \tag{69}$$

die Gleichungen der Seiten des Newton-Puiseux'schen Polygons. Setzen wir $X=m$, so folgt

$$Y = (m - e_i)q_i + k_{e_i} = \delta_i,$$

d. h. die δ_i sind die Strecken, die durch die Verlängerungen der Polygonseiten auf der im Punkte $X=m$ auf der Abszissenachse errichteten Senkrechten abgeschnitten werden. (Vgl. Figur, worin $\delta_\varkappa$ eingetragen ist.)

Aus dieser geometrischen Interpretation der δ_i geht unmittelbar hervor, daß

(69a) $$\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_\sigma$$

ist. Daher ist auch

(69b) $$\mathfrak{d}_1 > \mathfrak{d}_2 > \ldots > \mathfrak{d}_{\varkappa-1} > 0 > \mathfrak{d}_{\varkappa+1} > \ldots > \mathfrak{d}_\sigma .$$

Weil also $\mathfrak{d}_i$ eine positive Zahl ist für $i = 1, 2, \ldots \varkappa - 1$, so ist

$$\sum_x^\infty t^{-(n+c+1)/c - \mathfrak{d}_i} \leqq \sum_x^\infty t^{-(n+c+1)/c} \qquad (i = 1, 2, \ldots \varkappa - 1),$$

d. h. die Umgestaltung der Formel (63) in (65) bleibt für $u_{\nu+1}(x)$ bestehen und wir erhalten als Analogon zu (65)

$$\left| \left(\Gamma(x+1)\right)^{-q_\varkappa} a_{\varkappa\lambda}{}^{-x} \exp\left(-\beta_{\varkappa\lambda}{}' x^{\frac{c-1}{c}} - \ldots - \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}} \right) x^{-\varrho_{\varkappa\lambda}} u_{\nu+1}(x) \right|$$

(70)
$$\leqq M^3 \left(\frac{G}{x_0^{\frac{n+1}{c}}} \right)^\nu \left\{ \frac{(e_{\varkappa-1} + \lambda) c}{(n+1)(x-1)^{\frac{n+1}{c}}} + \Omega'(x) \right\},$$

wobei $\Omega'(x)$ die Gesamtheit aller Glieder bedeutet, die in der großen Klammer der Formel (63) die dritte Gruppe bilden, wenn wir daselbst vor dem Summationszeichen $x^{\mathfrak{r}ij}$ statt $x^{\mathfrak{r}ij + \mathfrak{d}_i}$ setzen.

Da wir auf $\Omega'(x)$ die gleiche Schlußweise anwenden wollen, die wir auf $\Omega(x)$ angewandt haben um Formel (65) in (66) überzuführen, beachten wir, daß wegen (69b) von den negativen Zahlen $\mathfrak{d}_{\varkappa+1}, \mathfrak{d}_{\varkappa+2}, \ldots \mathfrak{d}_\sigma$ die letzte den kleinsten Wert und daher von den positiven Zahlen $-\mathfrak{d}_{\varkappa+1}, -\mathfrak{d}_{\varkappa+2}, \ldots -\mathfrak{d}_\sigma$ die letzte den größten Wert hat. Weil aber die Zahlen $\mathfrak{d}_i$, was wir bisher nicht ausdrücklich hervorgehoben haben, zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Polygonseite gehören, so bezeichnen wir zweckmäßig

(71) $$-\mathfrak{d}_\sigma \equiv \mathfrak{d}^{(\varkappa)} \qquad (\mathfrak{d}^{(\varkappa)} \geqq 0)$$

und finden analog zu (66)

(72) $$\Omega'(x) \leqq (m - e_{\varkappa-1} - \lambda)(1 + \eta') x^{-(n+1)/c + \mathfrak{d}^{(\varkappa)}},$$

wobei η' eine von x nicht abhängende Konstante bedeutet.

Diesen Ausdruck substituieren wir in (70), und wenn wir M so wählen, daß es außer den Bedingungen (61) und (67) auch

$$(73)\qquad \begin{aligned} M &\geqq \frac{(e_{\varkappa-1}+\lambda)c\,x_0^{-\mathfrak{b}^{(\varkappa)}}}{(n+1)\left(1-\frac{1}{x_0}\right)^{(n+1)/c}} + (m-e_{\varkappa+1}-\lambda)(1+\eta') \\ &\geqq \frac{(e_{\varkappa-1}+\lambda)c\,x^{-\mathfrak{b}^{(\varkappa)}}}{(n+1)\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(n+1)/c}} + (m-e_{\varkappa-1}-\lambda)(1+\eta') \end{aligned}$$

erfüllt, so erhalten wir die für $u_{\nu+1}(x)$ gesuchte Abschätzungsformel in zweifacher Gestalt

$$(74)\qquad \begin{aligned} &\left|\left(\Gamma(x+1)\right)^{-q_\varkappa}\alpha_{\varkappa\lambda}^{-x}\exp\left(-\beta_{\varkappa\lambda}'\,x^{\frac{c-1}{c}}-\ldots-\beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\,x^{\frac{1}{c}}\right)x^{-\varrho_{\varkappa\lambda}}\,u_{\nu+1}(x)\right| \\ &\qquad\qquad \leqq \frac{M\,G^{\nu+1}}{x^{(n+1)/c-\mathfrak{b}^{(\varkappa)}}\left(x_0^{(n+1)/c-\mathfrak{b}^{(\varkappa)}}\right)^{\nu}} \end{aligned}$$

und

$$(74a)\qquad \begin{aligned} &\left|\left(\Gamma(x+1)\right)^{-q_\varkappa}\alpha_{\varkappa\lambda}^{-x}\exp\left(-\beta_{\varkappa\lambda}'\,x^{\frac{c-1}{c}}-\ldots-\beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\,x^{\frac{1}{c}}\right)x^{-\varrho_{\varkappa\lambda}}\,u_{\nu+1}(x)\right| \\ &\qquad\qquad \leqq M\left(\frac{G}{x_0^{(n+1)/c-\mathfrak{b}^{(\varkappa)}}}\right)^{\nu+1}. \end{aligned}$$

Dabei machen wir der Zahl n, die wir beliebig groß nehmen dürfen, die Auflage, es sei $\frac{n+1}{c}-\mathfrak{b}^{(\varkappa)}$ eine positive Zahl, also

$$(74b)\qquad n > c\,\mathfrak{b}^{(\varkappa)}-1.$$

Denn nur unter dieser Bedingung können wir Formel (74) durch (74a) ersetzen.

§ 9.

Nachdem wir im Vorausgehenden die Funktionen $u_0, u_1, \ldots u_\nu$ berechnet und in (74a) die verlangte Abschätzungsformel gefunden haben, gehen wir dazu über mit Hilfe der u_i ein Integral der vorgelegten Differenzengleichung (1) zu bilden und nachzuweisen, daß dieses Integral durch die Reihe (8a) für große Werte von x asymptotisch dargestellt wird. Weil wir in (74a) ν statt $\nu+1$ setzen können, so ist zunächst klar, daß die Reihe

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\Gamma(x+1)\right)^{-q_\varkappa}\alpha_{\varkappa\lambda}^{-x}\exp\left(-\beta_{\varkappa\lambda}'\,x^{\frac{c-1}{c}}-\ldots-\beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\,x^{\frac{1}{c}}\right)x^{-\varrho_{\varkappa\lambda}}\,u_\nu(x) \\ &\qquad\qquad \leqq M\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{G}{x_0^{(n+1)/c-\mathfrak{b}^{(\varkappa)}}}\right)^{\nu} \end{aligned}$$

für $x \geqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergiert, wenn wir

$$x_0 > G^{\frac{c}{n+1-c\,b^{(\varkappa)}}} \tag{75}$$

nehmen, welche Bedingung zu (61) und (61a) hinzuzufügen ist.

Wir definieren nun eine Funktion $\gamma_{\varkappa\lambda}$ durch die Gleichung

$$\gamma_{\varkappa\lambda} \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x) \tag{76}$$

oder

$$\gamma_{\varkappa\lambda} \equiv u_0(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu+1}(x)\,. \tag{76a}$$

Setzen wir hier aus (44) für $u_0(x)$ seinen Wert ein, so definiert uns die Gleichung

$$\begin{aligned}\gamma_{\varkappa\lambda} = \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa} \alpha_{\varkappa\lambda}^{x} \exp\left(\beta_{\varkappa\lambda}'\, x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\, x^{\frac{1}{c}}\right) \\ \cdot x^{\varrho_{\varkappa\lambda}} \left(\Phi_{\varkappa\lambda} + \frac{\gamma_{\varkappa\lambda}}{x^{\frac{n+1}{c}}}\right)\end{aligned} \tag{77}$$

die Größe $\gamma_{\varkappa\lambda}$, wobei $\Phi_{\varkappa\lambda}$ die in (44a) angegebene Bedeutung hat. Um das Verhalten von $\gamma_{\varkappa\lambda}$ für wachsende x zu prüfen geben wir der Gleichung (77) wieder auf Grund von (44) die Form

$$\gamma_{\varkappa\lambda} = u_0(x) + \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa} \alpha_{\varkappa\lambda}^{x} \exp\left(\beta_{\varkappa\lambda}'\, x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\, x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_{\varkappa\lambda}} \cdot \frac{\gamma_{\varkappa\lambda}}{x^{\frac{n+1}{c}}} \tag{77a}$$

und nun zeigt ein Vergleich zwischen (76a) und (77a), daß

$$\frac{\gamma_{\varkappa\lambda}}{x^{\frac{n+1}{c}}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\Gamma(x+1)\right)^{-q_\varkappa} \alpha_{\varkappa\lambda}^{-x} \exp\left(-\beta_{\varkappa\lambda}'\, x^{\frac{c-1}{c}} \ldots -\beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\, x^{\frac{1}{c}}\right) x^{-\varrho_{\varkappa\lambda}} u_{\nu+1}(x)$$

ist. Hieraus folgt wegen (74)

$$\left|\frac{\gamma_{\varkappa\lambda}}{x^{\frac{n+1}{c}}}\right| \leqq \frac{MG}{x^{(n+1)/c - b^{(\varkappa)}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{G}{x_0^{(n+1)/c - b^{(\varkappa)}}}\right)^{\nu} \tag{78}$$

oder

$$\left|\frac{\gamma_{\varkappa\lambda}}{x^{b^{(\varkappa)}}}\right| \leqq MG \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{G}{x_0^{(n+1)/c - b^{(\varkappa)}}}\right)^{\nu}. \tag{78a}$$

Es bleibt also der absolute Betrag von $\frac{\gamma_{\varkappa\lambda}}{x^{\mathfrak{d}(\varkappa)}}$ für $x \geqq x_0$ unter einer endlichen Schranke, und weil wegen (74b) $\frac{n+1}{c} > \mathfrak{d}^{(\varkappa)}$, so kann in Gleichung (77) der absolute Wert des Ausdruckes $-\frac{\gamma_{\varkappa\lambda}}{x^{(n+1)c}}$ für wachsende x kleiner als jede angebbare Größe gemacht werden, d. h. der Wert der durch (76) definierten Funktion $\mathfrak{y}_{\varkappa\lambda}$ kann durch die Gleichung (77) für große positive Werte von x näherungsweise berechnet werden.

Wir müssen noch zeigen, in welchem Zusammenhang diese Funktion $\mathfrak{y}_{\varkappa\lambda}$ mit der Differenzengleichung (1) steht. Zu diesem Zweck addieren wir alle linearen Differenzengleichungen, durch die wir die Funktionen $u_0, u_1, \ldots u_\nu$ definiert haben:

$$\begin{aligned} D_1[u_0(x)] &= 0 \\ D_1[u_1(x)] &= D_2[u_0(x)] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_1[u_{\nu-1}(x)] &= D_2[u_\nu(x)] \end{aligned}$$

und erhalten

$$D_1[u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_{\nu+1}(x)] = D_2[u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_\nu(x)].$$

Für $\nu = \infty$ ist also

$$D_1\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)\right) = D_2\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)\right),$$

und da wir am Schlusse des § 4 gezeigt haben, daß die Gleichung (43)

$$D_1(\mathfrak{y}) = D_2(\mathfrak{y})$$

gleichwertig mit der ursprünglichen Gleichung (1) $D(\mathfrak{y}) = 0$ ist, so folgt, daß

$$\mathfrak{y}_{\varkappa\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)$$

ein Integral von (1) ist und daß die Werte dieses Integrals für große positive x durch Gleichung (77) angenähert berechnet werden können.

§ 10.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen lassen sich leicht erweitern. Wir wählen die ganze positive Zahl n so, daß

Ungleichung (74b) für alle Seiten des Newton-Puiseux'schen Polygons erfüllt ist, d. h.

$$n > c\,\mathfrak{d}^{(i)} - 1. \qquad (i=1, 2, \ldots \sigma). \tag{79}$$

Ferner bestimmen wir x_0 so, daß die Formeln (58) bis (59a) für die zu allen Polygonseiten gehörenden Konstanten q_i, α_{ij}, $\beta_{ij}', \ldots, \beta_{ij}^{(c-1)}$, ϱ_{ij} $(i=1, 2, \ldots \sigma;\ j=1, 2, \ldots \mathfrak{e}_i)$ richtig bleiben, und wählen zu diesem x_0 entsprechend den Bedingungsgleichungen (61), (67), (73) und (67a) die Zahlen M und G. Nun lassen sich die Schlüsse der Paragraphen 4 bis 9 für alle durch (33) und (33a) definierten Funktionen φ_{ij} $(i=1, 2, \ldots \sigma;\ j=1, 2, \ldots \mathfrak{e}_i)$ durchführen und wir erhalten analog zu (77) m Gleichungen

$$\mathfrak{y}_{ij} = \big(\Gamma(x+1)\big)^{q_i}\,\alpha_{ij}^{x} \exp\Big(\beta_{ij}'\,x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{ij}^{(c-1)}\,x^{\frac{1}{c}}\Big)\,x^{\varrho_{ij}}\Big(\Phi_{ij} + \frac{\gamma_{ij}}{x^{(n+1)/c}}\Big) \tag{80}$$

$$(i=1, 2, \ldots \sigma;\ j=1, 2, \ldots \mathfrak{e}_i),$$

die für große positive x die Werte von m Integralen der Differenzengleichung (1) berechnen lassen.

Wir wollen zeigen, daß diese m Integrale (80) ein Fundamentalsystem bilden. Aus (80) entnehmen wir

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathfrak{y}_{ij}}{\mathfrak{y}_{i-\mu,\,j-\nu}} = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots \sigma;\ j=1, 2, \ldots \mathfrak{e}_i), \tag{80a}$$

wenn hierbei μ die Werte $0, 1, \ldots i-1$ und ν die Werte $0, 1, \ldots j-1$ so annehmen, daß μ und ν nicht zugleich Null sind. Wären die $\mathfrak{y}_{ij}$ kein Fundamentalsystem, so wären sie linear abhängig und es gäbe eine Identität

$$c_{11}\,\mathfrak{y}_{11} + c_{12}\,\mathfrak{y}_{12} + \ldots + c_{\sigma_2}\,\mathfrak{y}_{\sigma_2} = 0 \tag{81}$$

mit konstanten Koeffizienten. Dividiert man aber diese Gleichung durch $\mathfrak{y}_{11}$ und läßt x beliebig wachsen, so folgt $c_{11} = 0$. Läßt man also das erste Glied weg und dividiert durch $\mathfrak{y}_{12}$, so folgt in gleicher Weise $c_{12} = 0$. Da sich dieses Verfahren bis zu $c_{\sigma_2} = 0$ fortsetzen läßt, so sind alle $c_{ij} = 0$ und die $\mathfrak{y}_{ij}$ in Gleichung (30) bilden ein Fundamentalsystem.

Ist n' eine ganze positive Zahl derart, daß $n' > n$ ist, so können wir die Ableitungen der Paragraphen 4 bis 9 statt auf (33) und (33a) auch auf

$$\psi_{ij} \equiv \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i} \alpha_{ij}^{x} \exp\left(\beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_{ij}} \Psi_{ij},$$

(82)

$$\Psi_{ij} \equiv 1 + \frac{A_{ij}'}{x^{\frac{1}{c}}} + \ldots + \frac{A_{ij}^{(n')}}{x^{\frac{n'}{c}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma;\ j = 1, 2, \ldots \varepsilon_i;\ n' > n)$$

anwenden und finden ein anderes Fundamentalsystem von Integralen

$$\text{(82a)}\quad \eta_{ij} = \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i} \alpha_{ij}^{x} \exp\left(\beta_{ij}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{ij}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_{ij}} \left(\Psi_{ij} + \frac{\chi_{ij}}{x^{(n'+1)/c}}\right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots \sigma;\ j = 1, 2, \ldots \varepsilon_i),$$

wobei der absolute Betrag von $\chi_{ij} x^{-\delta^{(i)}} \left(\delta^{(i)} < \frac{n'+1}{c}\right)$ unter einer endlichen Schranke bleibt.

Es ist schließlich noch der Zusammenhang zwischen den zwei Fundamentalsystemen (80) und (82a) zu untersuchen. Wir wählen aus der ersten Schar ein bestimmtes Integral $y_{\varkappa\lambda}$ aus und setzen

$$y_{\varkappa\lambda} = c_{11}\eta_{11} + c_{12}\eta_{12} + \ldots + c_{\sigma\varsigma}\eta_{\sigma\varsigma},$$

worin die c_{ij} willkürliche Konstante sind, die mit den Konstanten in Gleichung (81) nichts zu tun haben.

Dividieren wir beide Seiten durch

$$\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_1} \alpha_{11}^{x} \exp\left(\beta_{11}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{11}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_{11}}$$

und gehen zur Grenze $x = \infty$ über, so wird die linke Seite Null und ebenso alle Glieder der rechten Seite mit Ausnahme des ersten, welches wegen

$$\lim_{x=\infty} \left(\Psi_{ij} + \frac{\chi_{ij}}{x^{(n'+1)/c}}\right) = 1$$

den Wert c_{11} bekommt. Folglich ist $c_{11} = 0$. In analoger Weise zeigt man

$$c_{12} = c_{13} = \ldots = c_{\varkappa,\,\lambda-1} = 0.$$

Nach Division durch

$$\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa} \alpha_{\varkappa\lambda}^{x} \exp\left(\beta_{\varkappa\lambda}' x^{\frac{c-1}{c}} + \ldots + \beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)} x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\varrho_{\varkappa\lambda}}$$

wird für $x=\infty$ die rechte Seite $c_{\varkappa\lambda}$, die linke aber wegen

$$\lim_{x=\infty}\left(\Phi_{\varkappa\lambda}+\frac{\gamma_{\varkappa\lambda}}{x^{(n+1)/c}}\right)=1$$

gleich 1, so daß $c_{\varkappa\lambda}=1$ ist.

Es ist also

$$\gamma_{\varkappa\lambda}=\eta_{\varkappa\lambda}+c_{\varkappa,\lambda+1}\,\eta_{\varkappa,\lambda+1}+\ldots+c_{\sigma\varsigma}\,\eta_{\sigma\varsigma}\,. \tag{83}$$

Hier setzen wir auf der rechten Seite für $\eta_{\varkappa\lambda}$ den aus (82) sich ergebenden Ausdruck ein und geben dann (83) die Form

$$\begin{aligned}\gamma_{\varkappa\lambda}=&\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_\varkappa}\alpha_{\varkappa\lambda}^{x}\exp\left(\beta_{\varkappa\lambda}'\,x^{\frac{c-1}{c}}+\ldots+\beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\,x^{\frac{1}{c}}\right)\\&\cdot x^{\varrho_{\varkappa\lambda}}\left(\Psi_{\varkappa\lambda}+\frac{\chi_{\varkappa\lambda}'}{x^{(n'+1)/c}}\right).\end{aligned} \tag{83a}$$

Dabei wird die neue Größe $\chi_{\varkappa\lambda}'$ durch die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{\chi_{\varkappa\lambda}'}{x^{\mathfrak{d}(\varkappa)}}\equiv&\frac{\chi_{\varkappa\lambda}}{x^{\mathfrak{d}(\varkappa)}}+\left(\Gamma(x+1)\right)^{-q_\varkappa}\alpha_{\varkappa\lambda}^{-x}\exp\left(-\beta_{\varkappa\lambda}'\,x^{\frac{c-1}{c}}-\ldots-\beta_{\varkappa\lambda}^{(c-1)}\,x^{\frac{1}{c}}\right)\\&\cdot x^{-\varrho_{\varkappa\lambda}+(n'+1)/c-\mathfrak{d}(\varkappa)}\cdot\left[c_{\varkappa,\lambda+1}\,\eta_{\varkappa,\lambda+1}+c_{\varkappa,\lambda+2}\,\eta_{\varkappa,\lambda+2}+\ldots+c_{\sigma\varsigma}\,\eta_{\sigma\varsigma}\right]\end{aligned}$$

definiert. Der absolute Betrag der rechten Seite bleibt für wachsende x unter einer endlichen Schranke, mithin wird in (83a) $\frac{\chi_{\varkappa\lambda}'}{x^{(n'+1)/c}}$ wegen $\frac{n'+1}{c}>\mathfrak{d}(\varkappa)$ für große positive Werte von x der Null beliebig nahe gebracht. Es läßt sich also jedes der Integrale (80) auch in der Form (83a) darstellen, wobei die Größen χ_{ij}' analoge Eigenschaften wie die Größen γ_{ij} haben.

Damit haben wir nachgewiesen, daß zwischen den Reihen (32a) und den Integralen der Differenzengleichung (1) die asymptotischen Gleichungen

$$\gamma_{ij}\sim S_{ij} \qquad (i=1,2,\ldots\sigma;\ j=1,2,\ldots\varepsilon_i)$$

bestehen.

Mit Benützung der von Herrn Perron gegebenen Definition, die in unserer Einleitung durch die Ungleichungen (IV) zum Ausdruck kommt, können wir die Ergebnisse unserer Untersuchungen folgendermaßen zusammenfaßen:

Jede lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung von der Form (1) hat dem Satze des Herrn Perron entsprechend ein Fundamentalsystem von m Integralen

$$y_{ij} \qquad (i=1,2,\ldots\sigma;\ j=1,2,\ldots e_i-e_{i-1}),$$

die in σ Klassen zerfallen, so daß die Integrale einer Klasse und deren lineare Kombinationen von ein und derselben Ordnung sind. Gehören dabei zu jeder Klasse bezüglich

$$e_i-e_{i-1} \qquad (i=1,2,\ldots\sigma)$$

Integrale und sind deren Ordnungen $q_1>q_2>\ldots>q_\sigma$, wobei

$$q_i=\frac{k_{e_i}-k_{e_{i-1}}}{e_i-e_{i-1}} \qquad (i=1,2,\ldots\sigma),$$

so existiert zu jeder Klasse eine charakteristische Gleichung, die nach Beseitigung der Nullwurzeln die Gestalt

$$a_{e_{i-1}}\alpha_i^{e_i-e_{i-1}}+\sum_{j=1}^{e_i-e_{i-1}-1} a_{e_{i-1}+j}\alpha_i^{e_i-e_{i-1}-j}+a_{e_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots\sigma)$$

besitzt und deren Grad gleich der Anzahl der zu der betr. Klasse gehörenden Integrale ist. Zu jeder der Wurzeln α_{ij} findet man eine Serie von Hilfskonstanten $\beta_{ij}', \beta_{ij}'', \ldots \beta_{ij}^{(c-1)}$ durch lineare Gleichungen eindeutig bestimmt. Sind die absoluten Beträge der zu einer charakteristischen Gleichung gehörenden Wurzeln von einander verschieden oder sind für die zu zwei voneinander verschiedenen Wurzeln mit gleichen absoluten Beträgen $|\alpha_{\varkappa\mu}|=|\alpha_{\varkappa\nu}|$ gehörenden Hilfskonstanten die reellen Beträge der Differenzen

$$\beta_{\varkappa\mu}^{(i)} \quad \beta_{\varkappa\nu}^{(i)} \qquad (i=1,2,\ldots c-1)$$

nicht sämtlich gleich Null, so gibt es m verschiedene Reihen

$$S_{ij}=\left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i}\alpha_{ij}^{x}\exp\left(\beta_{ij}'x^{\frac{c-1}{c}}+\ldots+\beta_{ij}^{(c-1)}x^{\frac{1}{c}}\right)$$
$$\cdot x^{\varrho_{ij}}\left(1+\frac{A_{ij}'}{x^{\frac{1}{c}}}+\frac{A_{ij}''}{x^{\frac{2}{c}}}+\ldots\right) \qquad (i=1,2,\ldots\sigma;\ j=1,2,\ldots e_i-e_{i-1}),$$

welche die Differenzengleichung (1) formal erfüllen und für große positive Werte der Variablen x die asymptotischen Gleichungen

$$y_{ij} \sim S_{ij} \qquad (i=1,2,\ldots\sigma;\ j=1,2,\ldots e_i-e_{i-1})$$

befriedigen.

* * *

Es hat keine Schwierigkeit anzugeben, unter welchen Bedingungen die Gleichung (1) durch Potenzreihen formal erfüllt wird, die nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreiten. Wir haben durch die Substitution der Reihe (8a) die Gleichung (1) in die Formen (9), (10), (15) und (18) übergeführt. Es fragt sich also, unter welchen Umständen diese Formen ganzzahlige Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ aufweisen. Aus (9) und (10) erhellt, daß erstens die Koeffizienten P_i der Gleichung (1) nach ganzen Potenzen von x^{-1} fortschreitende Reihen sein müssen, weil sonst die in (10) enthaltene Reihe mit den Koeffizienten C_i, C_i', . . . gebrochene Exponenten enthält. Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend.

Es kommt dazu, daß die in (18) auftretenden Größen $\mathfrak{k}_i$ sämtlich ganze Zahlen, evt. Null seien. Denn stünde auch in der Klammer von (18) eine ganzzahlige Potenzreihe, so würde sie nach Multiplikation mit $x^{-\mathfrak{k}_i}$ nicht ganzzahlig bleiben. Die $\mathfrak{k}_i$ sind durch (12) für die x^{te} Polygonseite definiert. Weil aber die $\mathfrak{k}_i$ für alle Polygonseiten ganz sein müssen, lautet die zweite Forderung: Es müssen alle durch die Gleichung

$$\mathfrak{k}_{ij} \equiv (m-e_i)\,q_i + k_{e_i} - [(m-j)\,q_i + k_j] \qquad (i=1,2,\ldots\sigma;\ j=0,2,\ldots m) \tag{84}$$

definierten Zahlen Ganze oder Null sein.

Diese Forderung kann auf zweierlei Weise erfüllt werden. Da die $\mathfrak{k}_{ij}$ Differenzen zweier Zahlen sind, so könnten erstens alle Zahlen $(m-i)\,q_j + k_i$ $(i=0,1,2,\ldots m;\ j=1,2,\ldots\sigma)$ ganz sein. Der einfachste Fall wäre speziell: alle q_i ganzzahlig und ebenso alle k_i. Zweitens aber wären die $\mathfrak{k}_{ij}$ auch dann ganze Zahlen, wenn die $(m-i)\,q_j + k_i$ Brüche wären, die sämtlich in der Form $g_i + \varepsilon$ $[i=1,2,\ldots(m+1)\,\sigma]$ geschrieben werden könnten, wobei die g_i Ganze sind und ε einen konstanten echten Bruch bedeutet.

Unter Benützung der zur Gleichung (12) gegebenen geometrischen Interpretation der $\mathfrak{k}_{ij}$ läßt sich die Forderung betreffs der $\mathfrak{k}_{ij}$ auch so aussprechen: In dem zur vorgelegten Differenzengleichung gehörenden Polygon müssen die Ordinatendifferenzen zwischen jedem der Punkte Q_i und jeder verlängerten Polygonseite ganze Zahlen sein. Sollen also sämtliche $\mathfrak{k}_{ij}$ Null sein, so darf das Polygon nur eine Seite haben, auf der dann alle Punkte Q_i liegen müssen. Das ist z. B. der Fall in Gleichung (VI) unserer Einleitung.

Sind aber diese beiden Bedingungen bezüglich der P_i und $\mathfrak{k}_{ij}$ erfüllt, dann müssen unsere gelegentlich der Gleichungen (28) ff. definierten Summen

$$\mathfrak{S}, \mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \ldots \mathfrak{S}^{(c)}, \mathfrak{S}^{(c+1)}, \ldots$$

mit Ausnahme von

$$\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{(c)}, \mathfrak{S}^{(2c)}, \ldots$$

Null sein. Denn auf den Parallelen, die mlt den Polygonseiten gebrochene Ordinatendifferenzen haben, kann keiner der Punkte Q_i liegen. In diesem Fall zeigen die eben genannten Gleichungen, daß die Hilfskonstanten $\beta_{ij}', \beta_{ij}'', \ldots \beta_{ij}^{(c-1)}$ gleich Null werden, und die Reihen (32a) nehmen die einfache Gestalt an:

$$S_{ij} \equiv \left(\Gamma(x+1)\right)^{q_i} \alpha_{ij}^{x}\, x^{\varrho_{ij}} \left(1 + \frac{A_{ij}'}{x} + \frac{A_{ij}''}{x^2} + \ldots\right) \quad (i=1,2,\ldots\sigma;\ j=1,2,\ldots e_i - e_{i-1}).$$

Diese Reihen haben den gleichen Typus wie in (VII), doch haben wir nachgewiesen, daß sie nicht notwendig eine Differenzengleichung mit nur einer Polygonseite erfordern, wie es bei Gleichung (VI) der Fall ist.

Wenn eine Differenzengleichung vorliegt, die durch Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ formal erfüllt wird, ist es unnötig die durch (3) und (6) definierten Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gleichnamig zu machen, weil wir keine nach Potenzen von $x^{-\frac{1}{c}}$ fortschreitende Reihe brauchen. Dann brauchen aber die q_i in Gleichung (4) und mit ihnen die k_i in Gleichung (1) auch nicht notwendig rationale Zahlen zu sein und wir machen zur Erklärung der Gleichung (1) in § 1 den Zusatz: Sind die Koeffizienten P_i der vorgelegten linearen Differenzengleichung m^{ter} Ordnung (1) nach ganzen Potenzen

von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihen und sind die durch (84) definierten Zahlen f_{ij} ganze Zahlen inkl. Null, so dürfen die Exponenten $k_1, k_2, \ldots k_m$ in Gleichung (1) irrational sein.

Es sind natürlich auch Differenzengleichungen der Form (1) möglich, bei denen die Integrale einer Klasse durch ganzzahlige Potenzreihen, die einer andern Klasse aber durch Potenzreihen mit gebrochenen Exponenten asymptotisch dargestellt werden. Welche Lage dann die Punkte Q_i zu den Seiten des Polygons einnehmen, ist in dem Vorausgehenden schon beantwortet.

LEBENSLAUF.

Ich bin am 9. November 1878 in Pirmasens geboren, besuchte die Volksschule in Ludwigshafen a. Rh. und das humanistische Gymnasium in Mannheim, das ich 1897 absolvierte. Ich widmete mich ein Jahr lang dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Heidelberg, wo ich in erster Linie die Vorlesungen der Herren Professoren Cantor, Koenigsberger und Quincke hörte. Darauf setzte ich meine Studien in Mathematik und Physik drei Jahre hindurch an der Universität München fort, woselbst ich insbesondere den Vorlesungen der Herren Professoren Bauer, Doehlemann, Graetz, Lindemann, Lommel und Pringsheim folgte. In den Jahren 1899 und 1901 bestand ich die beiden Prüfungsabschnitte für das Lehramt in Mathematik und Physik und bin seit dieser Zeit Lehrer am humanistischen Gymnasium Pirmasens.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit erhielt ich von Herrn Professor Dr. Oskar Perron und es sei mir gestattet ihm hierfür sowie für das Interesse bei der Ausführung meinen Dank zum Ausdruck zu bringen. Desgleichen danke ich bestens meinem Kollegen, Herrn Professor Dr. Heinrich Wieleitner, für die wertvolle Unterstützung, die er mir bei der Drucklegung dieser Arbeit hat zuteil werden lassen.